Základy algoritmizace a programování

Přednáška 1

23. září 2019

Obsah

Úvodní informace

Olga Majlingová : ÚTM, Karlovo nám., budova D, 204,
olga@majling.eu http://olga.majling.eu

- web: http://marian.fsik.cvut.cz/zapg Informace k předmětu

(pro prezenční studium)

Podmínky udělení **klasifikovaného** zápočtu:
Bodované odevzdané příklady (prográmky+test):
maximální zisk **Z** bodů, student získal **Q** bodů.

- hodnocení **E** : 50% Z$\leq$ **Q** $<$ 60 % Z
- hodnocení **D** : 60% Z$\leq$ **Q** $<$ 70 % Z
- hodnocení **C** : 70% Z $\leq$ **Q** $<$ 80 % Z
- hodnocení **B** : 80% Z $\leq$ **Q** $<$ 90 % Z
- hodnocení **A** : 90% Z $\leq$ **Q** $<$ 100 % Z

Jak získat zápočet

Organizace předmětu: 5 úloh a jejich řešení v MATLABu.

23.9. Úloha první: Maticová (do 30.9.2019)

30.9. Úloha druhá:

7.10. Úloha třetí:

14.10. Úloha čtvrtá:

21.10. Úloha pátá:

Při účasti na méně než třech termínech zápočet udělen nebude (předmět nebyl absolvován).

5 domácích úloh:

- Odevzdání v zadaném termínu, vlastní vypracování 10 bodů
  bonusy a malusy
- bonusy: rozšíření zadání, originalita, pečlivost
- malusy: pozdní odevzdání, "podobnost" s dříve odevzdaným řešením
- Zlepšení hodnocení (pouze po odevzdání domácích úloh): zápočtový test ve zkouškovém období.

Cíle předmětu

NAUČIT SE
NAUČIT POČÍTAČ ŘEŠIT ÚLOHU,
KTEROU SAMI UMÍME ŘEŠIT

Počítačový program dělá jen to, co mu řeknete, nikdy však nedělá to, co byste chtěli, aby udělal.

- být schopen použít MATLAB pro řešení jednoduchých úloh
- být schopen číst a psát jednoduché programy
- rozumět základním konstrukcím a umět je použít

Název předmětu : Několik příkladů v MATLABu

Úlohy, které umíme řešit

- Najít "něco"v seznamu
  - **pojem "regulární"ve skriptech**
    Musíme pročítat skripta, slovo po slovu, dokud nenajdeme hledaný pojem.
  - **pojem "regulární"v rejstříku pojmů ve skriptech**
    Rejstřík pojmů bývá **uspořádaný** (podle abecedy).
    Nemusíme prohledávat pojmy od **a** do **z**, ale vyhledáme **r** (cca 18. písmeno z 26 písmen - hledáme ve druhé polovině),
    tj. mezi **n** a **z**, podíváme se do středu druhé poloviny (tam je **t**,
    tj. hledáme dál mezi **q** a **t**, . . . najdeme podstatně rychleji.
- Trojúhelník
  Chceme znát velikosti stran a úhlů, obvod a plochu trojúhelníka, zadaného 3 prvky. Známe věty o trohúhelníku a vzorce. Podle toho, co je zadáno, sestavíme pořadí výpočtů.
  - velikosti 3 stran (a, b, c)
  - odvěsnu, výšku a pravý úhel $(b, v_c, \gamma = \frac{\pi}{2})$
  - ...
  - ...
  - ...

Algoritmy a programy

- Algoritmus ...
  - ... si počítač **sám** nevymyslí!
- Program ... data+ příkazy
  - ... data (co mám, co chci)
  - ... příkazy: mění data a určují pořadí výpočtů
- Základní příkazy jsou:
  - přiřazení
  - větvení (podmíněný)
  - cyklus (opakování)
- V příkazech se vyskytují **proměnné**

  proměnné mají jméno, typ a hodnotu

Algoritmus

Úloha je zadána svými vstupními a výstupními daty.

Algoritmus chápeme jako přesný postup,
kterým lze vyřešit daný typ úlohy.

Algoritmus . . .

. . . za nás počítač nevymyslí!

Algoritmizace a programování

Přípravu programu obvykle dělíme na dvě etapy:

- **Algoritmizace**
  Musíme přemýšlet!
  JAK ze vstupních dat dostaneme výsledky?
  Postup řešení úlohy si představujeme jako
  změnu hodnot proměnných
  ... postupně upřesňujeme
  ... až se dostaneme k příkazům, kterým "rozumí" vykonavatel algoritmu
  ... můžeme znázornit např. graficky, např. ve formě vývojového diagramu
- **Programování**
  Podle zápisu algoritmu sestavíme program v programovacím jazyku.

Trojúhelník

Výsledky: $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, S, o$

- Vstupní data: velikosti 3 stran (a, b, c).
  Jak ze vstupních dat dostaneme výsledky?
  1. $o = a + b + c$
  2. $S = \sqrt{\frac{o}{2}\left(\frac{o}{2} - a\right)\left(\frac{o}{2} - b\right)\left(\frac{o}{2} - c\right)}$ (Heronův vzorec)
  3. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (kosinová věta)
     - $\alpha = \arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, β, γ cyklická záměna
- Co musí umět vykonavatel?
  - sčítat, odčítat, násobit, dělit
  - odmocňovat, počítat arccos
  - vyjádřit neznámou z rovnice
  - provést cyklickou záměnu
- Záleží na pořadí výpočtů?

Trojúhelník

Výsledky: $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, S, o$

- Vstupní data: odvěsna, výška a pravý úhel $(b, v_c, \gamma = \frac{\pi}{2})$
  Jak ze vstupních dat dostaneme výsledky? obrázek!
  1. $v_c^2 + c_b^2 = b^2 \Rightarrow c_b = \sqrt{b^2 - v_c^2}$ (Pythagorova věta)
  2. $v_c^2 = c_a \cdot c_b \Rightarrow c_a = \dfrac{v_c^2}{c_b}$ (Euklidova věta)
  3. $c = c_a + c_b$
  4. $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$ (Pythagorova věta)
  5. $o = a + b + c$
  6. $S = \frac{1}{2}c \cdot v_c$ nebo $S = \frac{1}{2}ab$ nebo Heronův vzorec
  7. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (kosinová věta)
     - $\alpha = \arccos\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, β, γ cyklická záměna
- Co musí umět vykonavatel?
  - sčítat, odčítat, násobit, dělit
  - odmocňovat, počítat arccos
  - vyjádřit neznámou z rovnice
  - provést cyklickou záměnu
- Záleží na pořadí výpočtů?

Data a příkazy

- DATA: (vstupní hodnoty, mezivýsledky, výsledky)
  proměnné a konstanty: mají jméno, typ, hodnotu

  Jméno konstanty, proměnné, struktury, souboru...

  i d e n t i f i k á t o r

  je posloupnost písmen a číslic, která **začíná písmenem.**

  písmena : a..z A..Z _ (znak podtržítka)

  (bez diakritiky), (NIC JINÉHO !)

  malá a velká písmena se rozlišují
- PŘÍKAZY
  co umí vykonavatel algoritmu
  mění hodnoty proměnných (přiřazení)

proměnná = hodnota_výrazu
- POŘADÍ PŘÍKAZŮ
  za sebou
  skoky (větvení, opakování)

Změnu hodnot proměnných provádíme přiřazovacím příkazem.
Podmíněný příkaz, přepínač a příkazy cyklu určují **pořadí příkazů**.

Aritmetické výrazy

Výrazy se skládají z jmen proměnných, čísel, operátorů, funkcí .

Operátory

- sčítání $+$
  odčítání -
- násobení $*$
- dělení $/$
  funkce `floor()`, `ceil()`
- umocňování ^
- kulaté závorky ( )

Matematické funkce

odmocnina: `sqrt(x)`
goniometrické: `sin(x); cos(x); tan(x);`
inverzní: `asin(x); acos(x); atan(x);`
logaritmy: `log(x); log10(x);`
e^x: `exp(x);`
absolutní hodnota: `abs(x)`
zbytek po dělení: `rem(x), mod(x)`

Vyčíslování: zleva doprava (zpravidla), obvyklá priorita :
závorky, funkce, mocnění, násobení/dělení, sčítání/odčítání
ZLOMKY! `a/b*c` nebo `a/(b*c)`!

Příklad: trojúhelník

- MATLAB nezná pojem cyklická záměna, bude nutné rozepsat.
- přiřazovací příkaz: $\boxed{\text{proměnná} = \text{výraz}}$,
  tj. nutné vyjádřit neznámou!
- Volíme jména proměnných a, b, c, S, o, alpha, beta, gamma
- Zapisujeme přiřazovací příkazy:

```
...    něco tu chybí!    ...
o  = a + b + c
o2 = o / 2        ... o2 je pomocná proměnná
S = sqrt(o2*(o2-a)*(o2-b)*(o2 - c))
      ...  násobení * NELZE vynechávat!
alpha = acos((b*b + c*c - a*a)/(2*b*c)) ... ZÁVORKY!
beta  = acos((a*a + c*c - b*b)/(2*a*c))
gamma = acos((a*a + b*b - c*c)/(2*a*b))
... něco tu chybí! ...
```

- Chybí zadání vstupních dat a tisk výsledků.

MATLAB

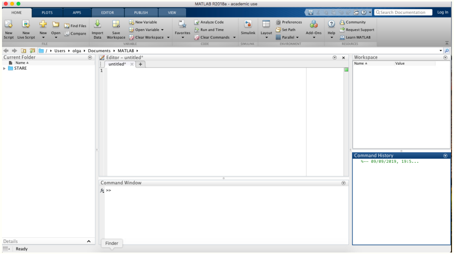
- stažení a instalace: `download.cvut.cz`,...
- VPN
- spuštění
- přikazové okno a editor
- nápověda (dokumentace)!!!

Okna Matlabu

Po spuštění systému se objeví okno složené z několika částí :

Uspořádání lze upravit pomocí menu HOME, záložka Layout.

- Current Folder
- Editor
- Command Window
- Workspace
- Command History



- Current Folder: zobrazuje obsah aktuálního (pracovního) adresáře.
- Editor: editování programu (skriptu), uloženého v textovém souboru.
- Command Window: práce v dialogovém režimu, zde lze MATLAB používat "jako kalkulačku". Jakmile napíšeme a odešleme příkaz, tak je ihned proveden/vyhodnocen.
- Workspace: zobrazuje všechny dostupné proměnné.
- Command History: obsahuje všechny použité příkazy, umožňuje opětovné spuštění dříve zadaných příkazů, úpravu/opravu dříve použitého příkazu.

Příklad trojúhelník: zápis skriptu

1. V okně Editor vytvoříme nový soubor
   (v menu HOME, New Script).
2. Soubor uložíme (v menu EDIT, Save - Save As)
   Název souboru musí být identifikátor!
3. Do souboru zapíšeme příkazy

```
%  něco tu chybí!    ...
o  = a + b + c
o2 = o / 2        %  o2 je pomocná proměnná
S = sqrt(o2*(o2-a)*(o2-b)*(o2 - c))
      %  násobení * NELZE vynechávat!
alpha = acos((b*b + c*c - a*a)/(2*b*c)) % ZÁVORKY!
beta  = acos((a*a + c*c - b*b)/(2*a*c))
gamma = acos((a*a + b*b - c*c)/(2*a*b))
% něco tu chybí! ...
```

4. Vše co je zapsáno mezi znaky % a konec řádku
   bude MATLAB ignorovat. Říkáme tomu komentář.

Vyzkoušíme...

Skript můžeme spustit

- z Editoru: tlačítkem
  zastaví se, když narazí na chybu – hned na prvním řádku

  ```
  Undefined function or variable 'a'.

  Error in trojuh1 (line 2)
  o = a + b + c
  ```

- v Command Window (po jednotlivých příkazech)

  ```
  >>o = a + b + c
  Undefined function or variable 'a'.
  ```

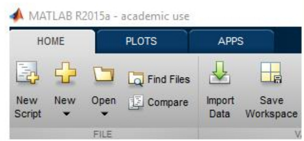
Proměnné v pravé straně přiřazovacího příkazu neexistují!

Proměnná **vzniká** (objeví se ve Workspace)
při prvním přiřazení hodnoty.

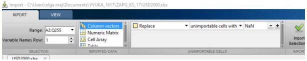
Proměnnou můžeme **smazat** (z Workspace):
`clear jmeno_promenne`

Zadání hodnot proměnným

- přiřazovacím příkazem: `a = 1`
- z klávesnice pomocí funkce input() `a = input(' ... ')`
- ze souboru pomocí funkce load()
  `a = load('jmeno_souboru ')`
- Data uložená v souborech `.xlsx` lze do Matlabu **importovat**.



Import se provede kliknutím na `Import Data`. Importovaná data se uloží do matice nebo vektoru v aktuálním pracovním kontextu (`workspace`).
Je možné zadat rozsah hodnot např. `Range A2:Qxxx`.
Je vhodné použít `Numeric Matrix` nebo `Column vectors`.



Výpis výsledků

středník	Některé příkazy vypisují své výsledky (např. `x = 215`). Pokud nepotřebujeme tyto výsledky vidět, lze potlačit výpis výsledků příkazu napsáním středníku na konec příkazu (`x = 215;`). Vypisování výsledků výpočtu by mělo být přehlednější než to, co vznikne pouhým nenapsáním středníku.
disp	Nejméně užitečná je funkce disp, která se chová přibližně stejně, jako vynechání středníku.
fprintf	Elegantní úpravu vytvoříme pomocí funkce fprintf (více - `help fprintf`).
save	Obsah jednotlivých proměnných lze uložit do souboru pomocí funkce save (více - `help save`)
printf	Obrázky (grafy) lze uložit v různých grafických formátech pomocí funkce print (více - `help print`).
publish	Skript (text programu) můžeme uložit v různých formátech pomocí funkce publish (více - `help publish`).

Matice – hlavní datový typ MATLABu

- skalární proměnná – matice rozměru (1×1)
- vektor – matice rozměru $(1 \times n)$ nebo $(m \times 1)$
- matice $(m \times n)$

Zadání matice

- po prvcích
- ze souboru
- genenerováním pomocí zabudovaných funkcí
- vytváření matic vlastními funkcemi

První operace

Zadání matice po prvcích:

- řádky a = [1 2 3 4] nebo b = [1, 2, 3, 4]
- sloupce a = [1 2 3 4]' nebo b = [1; 2; 3; 4]
- matice A = [1 2; 3 4]

```
>>A = [16 3 2 13;5 10 11 8;9 6 7 12;4 15 14 1]
A =
 16    3    2   13
  5   10   11    8
  9    6    7   12
  4   15   14    1
```

Po zadání je vytvořena v prostředí MATLABu vytvořena proměnná A, můžeme ji používat.

```
>>sum(A)
ans =
34 34 34 34
```

Pokud není určena proměnná, kam se má uložit výsledek, použije se proměnná `ans`

MATLAB – indexy

Indexy prvků matic:

Prvek v i–tém řádku, j–tém sloupci: A(i,j)

`A(4,2) = 15` … změní hodnotu jednoho prvku

Součet prvků ve 4. sloupci lze zapsat:

`A(1,4)+A(2,4)+A(3,4)+A(4,4)`

Pokus manipulovat s prvkem "mimo matici"

`t=A(4,5)` vyvolá chybové hlášení:

```
 ??? Index exceeds matrix dimension
```

ALE

```
>>X = A;
>>X (4,5) = 17
X=
 16   3   2  13   0
  5  10  11   8   0
  9   6   7  12   0
  4  15  14   1  17
```

Příklady práce s maticemi

- Načtení hodnot ze souboru
- Zjištění rozměrů matice

  ```
  [mA nA] = size(A)
  [mB nB] = size(B)
  ```
- Vytvoření matice jiného rozměru

  `B=reshape(B, mm, nn)`

  POZOR, počet čísel v původní matici B **musí** být **přesně** `mm*nn`
- Určení hodnosti matic:

  ```
  hA = rank(A)
  hB = rank(B)
  ```
- Je matice čtvercová nebo obdélníková?

  ```
  if mA = = nA
  disp('Matice A je ctvercova')
  else
  disp('Matice A je obdelnikova')
  end
  ```

Příklady práce s maticemi

- Je matice regulární?
```
if hA = =mA
disp('Matice A je regularni')
```
- Je matice symetrická?
```
if A = =A')
disp('Matice A je symetricka')
```
- Determinant matice
```
detA = det(A)
```
- Vlastní čísla a vlastní vektory matice
```
spektrumA = eig(A)
```
spektrum matice je množina všech vlastních čísel
```
[V D ] = eig(A)
```
výsledky: V matice, jejíž sloupce jsou vlastní vektory,
odpovídající vlastním číslům, ktará jsou na diagonále matice D
- Inverzní matice
```
invA = inv(A)
```

"Zašifrovaná zpráva"

Odesílatel zpráv má matici A, která obsahuje pouze celá čísla a jejíž determinant je rovný jedné nebo mínus jedné. Také má tabulku T, ve které je jednotlivým znakům abecedy přiřazeno číslo. Stejnou matici A a tabulku T vlastní i příjemce zpráv.
Vlastníci takové matice a tabulky si mohou posílat zprávy následujícím způsobem:

- Odesílatel zapíše zprávu a podle tabulky T ji přepíše do číselné podoby: $b_1 \dots b_N$
- $b_1 \dots b_N$ zapíše do matice B po sloupcích.
- Matici B vynásobí maticí A **zleva** a výsledek pošle příjemci.

Příjemce dostane matici (C). Co musí udělat? ($C = AB$)

- Vynásobit matici C: $A^{-1}C = A^{-1}AB$. **záleží na pořadí!**
- Podle tabulky T určit znaky abecedy.

Příklad

Tabulka:

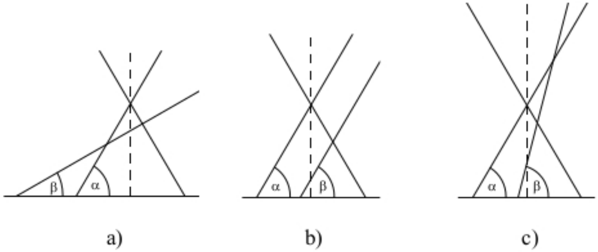
a	h	j	o
1	2	3	4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Zpráva: `ahoj` převedená do čísel 1 2 4 3
- matice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- $C = AB$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Kuželosečky

Kuželosečky jsou křivky, které je lze získat jako řezy na kuželové ploše. Při řezu rotační kuželové plochy rovinou, která neprochází vrcholem kuželové plochy, dostaneme právě jen elipsu, hyperbolu nebo parabolu. Typ kuželosečky je závislý na úhlu, pod jakým protíná rovina řezu kuželovou plochu. Označme α úhel, který svírají povrchové přímky rotační kuželové plochy s rovinou kolmou k ose rotace. Označme dále β úhel, který svírá rovina řezu σ s rovinou kolmou k ose rotační kuželové plochy. Potom mohou nastat tyto tři případy:



a) $\alpha > \beta$, řezem je elipsa.
b) $\alpha = \beta$, řezem je parabola.
c) $\alpha < \beta$, řezem je hyperbola.

Rovnice

Kuželosečka nebo též algebraická křivka 2. stupně je množina bodů X v rovině, jejichž souřadnice $[x, y]$ vyhovují v nějaké lineární soustavě souřadnic rovnici

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

kde a_{ij} jsou reálná čísla ($i, j = 1, 2, 3$) a $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$.
Pokud by $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, potom by rovnice byla lineární a vyjadřovala by přímku.

Vyjádření rovnice kuželosečky s dvojkami u některých koeficientů je čistě technické a umožňuje nám vyjádřit rovnici kuželosečky maticově:

$$(x\ y\ 1)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\mathcal{K}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

vhodnou volbou kartézské soustavy souřadnic, pomocí otočení a posunutí, zjednodušíme rovnici na tzv. **kanonický tvar**:

$$X \cdot \underbrace{P \cdot \mathcal{K} \cdot P^T}_{matice\ A} \cdot X^T \ = \ 0$$

Klasifikace kuželoseček

Označíme Δ determinant matice $\mathcal{K}$ a $\delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

kuželosečky

regulární: $\Delta \neq 0$

- elipsa
- parabola
- hyperbola

neregulární: $\Delta = 0$

- 2 různoběžky
- 2 rovnoběžky
- 1 bod
- prázdná množina

středové: $\delta \neq 0$

nestředové: $\delta = 0$

soustava rovnic $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix}$

má jediné řešení, souřadnice středu $[m, n] = [x, y]$

má buď ∞ řešení (přímka), nebo řešení nemá.

Kanonické a parametrické rovnice regulárních kuželoseček

kuželosečka	kanonická rovnice	parametrické rovnice
• kružnice	$x^2 + y^2 = r^2$	$x = r\cos t$ $y = r\sin t$ $t \in \langle 0,\ 2\pi)$
• elipsa	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$x = a\cos t$ $y = b\sin t$ $t \in \langle 0,\ 2\pi)$
• hyperbola	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$x = \dfrac{a}{\cos t}$ $y = b\ \mathrm{tg}\ t$ $t \neq \frac{\pi}{2},\ t \neq \frac{3}{2}\pi$
	případně	$x = a\cosh t$ $y = b\sinh t$ $t \in \mathbb{R}$
• parabola	$y^2 = 2px$	$x = \dfrac{1}{2p}t^2$ $y = t$ $t \in \mathbb{R}$

Uvedení kuželosečky na kanonický tvar

Určíme determinanty: "velký" (Δ) a "malý" (δ).

Určíme vlastní čísla λ_1, λ_2 a **jednotkové** vlastní vektory $u = (u_x, u_y), v = (v_x, v_y)$ matice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Regulární středové kuželosečky

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta}{\delta} \end{pmatrix},$$

matici P tvoří **jednotkové**
vlastní vektory $\vec{u}, \vec{v}$
a souřadnice středu m, n

$$P = \begin{pmatrix} u_x & v_x & 0 \\ u_y & v_y & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$$

Kanonická rovnice regulární středové kuželosečky je

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \quad (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0).$$

Střed kuželosečky $[m, n]$ je počátek nové soustavy souřadnic.

Osy kuželosečky tvoří osy nové soustavy souřadnic.
Jsou ve směrech určených vlastními vektory a jejich rovnice jsou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \; p, q \in \mathbb{R}$$

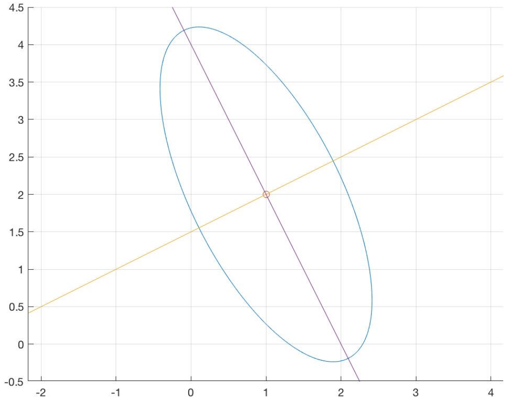
Elipsa

λ_1, λ_2 mají stejná znaménka a $\dfrac{\Delta}{\delta}$ má opačné znaménko než $\lambda_{1,2}$.

Příklad: $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18x - 12y + 15 = 0$

- Matice a determinanty:
$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & -6 \\ -9 & -6 & 15 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{rcr} \Delta & = & -36, \\ \delta & = & 6 \\ \frac{\Delta}{\delta} & = & -6 \end{array}$$
- Vlastní čísla a vlastní vektory matice k:
$$\lambda_1 = 1,\ \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ -2)^T,\ \lambda_2 = 6,\ \vec{v} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,\ 1)^T$$
- Střed: $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow S = [1,\ 2]$
- Osy: $x - 2y + 3 = 0,\ 2x + y - 4 = 0$
- Kanonická rovnice: $x^2 + 6y^2 - 6 = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{6} + y^2 = 1$
- $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & -6 \\ -9 & -6 & 15 \end{pmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^T}$$

Výsledek



Imaginární elipsa

λ_1, λ_2 mají stejná znaménka a Δ/δ **stejné** znaménko jako $\lambda_{1,2}$:

jedná se o prázdnou množinu bodů v $\mathbb{E}_2$.

Příklad: $x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$

- Matice a determinanty:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{rcr} \Delta & = & 0.5 \\ \delta & = & 0.75 \\ \frac{\Delta}{\delta} & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice k:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -1)^T,\ \lambda_2 = \frac{3}{2},\ \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1)^T$$

- Střed: $\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \left[-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right]$
- Osy: $x + y + \frac{4}{3} = 0,\ x - y = 0$
- Kanonická rovnice: $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2}{2} + \frac{9y^2}{2} = -1$
- $\underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^T}$

Hyperbola

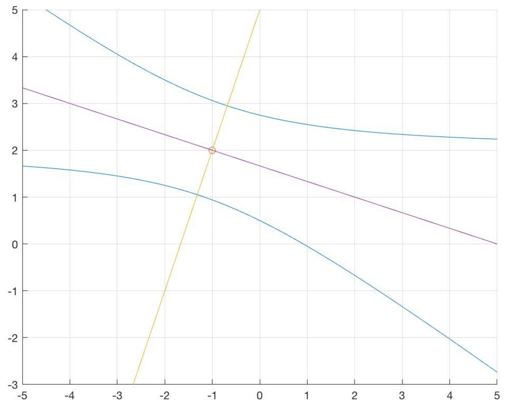
λ_1, λ_2 mají různá znaménka.

Příklad $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$

- Matice a determinanty:
$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{rcl} \Delta & = & 81, \\ \delta & = & -9 \\ \frac{\Delta}{\delta} & = & -9 \end{array}$$
- Vlastní čísla a vlastní vektory matice k:
$$\lambda_1 = 9, \; \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, \; 3)^T, \; \lambda_2 = -1, \; \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, \; 1)^T$$
- Střed: $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow S = [-1, \; 2]$
- Osy: $3x - y + 5 = 0, \; x + 3y - 5 = 0$
- Kanonická rovnice: $9x^2 - y^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{pmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} & -1 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^T}$$

Výsledek



Regulární nestředové kuželosečky

Právě jedno z vlastních čísel je nulové.

Označíme

$\lambda_1 \neq 0$, u - **jednotkový** vlastní vektor odpovídající tomuto vl. č.,

$\lambda_2 = 0$, v - **jednotkový** vlastní vektor odpovídající tomuto vl. č.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 p \\ 0 & \lambda_1 p & 0 \end{pmatrix},$$

matici P tvoří **jednotkové** vlastní vektory $\vec{u}, \vec{v}$ a souřadnice **vrcholu** m, n

$$P = \begin{pmatrix} u_x & v_x & 0 \\ u_y & v_y & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$$

Kanonická rovnice regulární nestředové kuželosečky je

$$\lambda_1 x^2 + 2py = 0, \quad (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0),$$

$$p = \frac{(a_{13}, a_{23})(v_x, v_y)}{\lambda_1}, \quad \text{vrchol } [m, n] = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p \\ \frac{\lambda_1 p^2 - a_{3,3}}{2\lambda_1 p} \end{pmatrix}$$

Osy kuželosečky tvoří osy nové soustavy souřadnic.

Jsou ve směrech určených vlastními vektory a jejich rovnice jsou

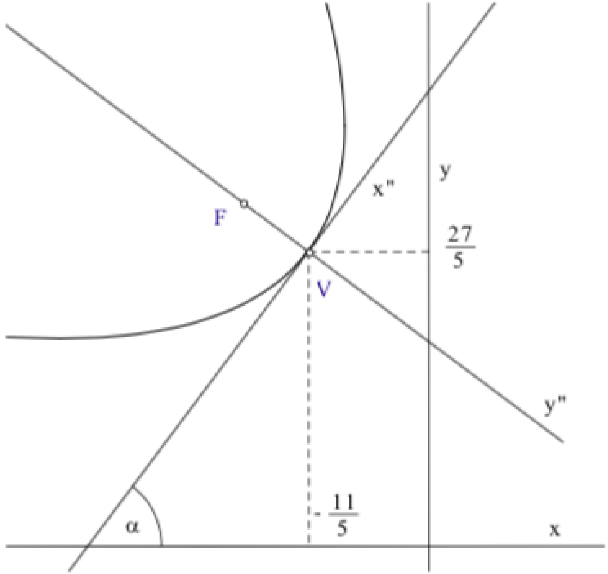
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \ p, q \in \mathbb{R}$$

Parabola

Příklad $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 30x - 210y + 975 = 0$

- Matice a determinanty:
$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 12 & 16 & -105 \\ 15 & -105 & 975 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \Delta = -3^2 5^6, \\ \delta = 0 \end{array}$$
- Vlastní čísla a vlastní vektory matice k:
$$\lambda_1 = 25, \; \vec{u} = \frac{1}{5}(3, \; 4)^T, \; \lambda_2 = 0, \; \vec{v} = \frac{1}{5}(-4, \; 3)^T$$
- $p = \dfrac{(15, \; -105)(-4, \; 3)\frac{1}{5}}{25} = -3$
- Vrchol: $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \left[-\dfrac{11}{5}, \; \dfrac{27}{5} \right]$
- Osy: $3x + 4y - 15 = 0$ (osa paraboly), $4x + 3y - 25 = 0$
- Kanonická rovnice: $x'^2 - 6y' = 0$
- Transformační rovnice mezi původní (x, y) a novou (x', y') soustavou souřadnic:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -11 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Výsledek



Neregulární kuželosečky

- **neregulární středové**: $\Delta = 0, \ \delta \neq 0$
  - $\delta < 0$ $(\lambda_1 \lambda_2 < 0)$
    2 různoběžné přímky,
    směrové vektory odpovídají vlastním vektorům,
    průsečík - ve středu
  - $\delta > 0$ $(\lambda_1 \lambda_2 > 0)$
    jediný bod (střed)
- **neregulární nestředové** $\Delta = 0, \ \delta = 0$ (např. $a_{11} \neq 0, \ \lambda_1 \neq 0$)
  - $a_{11} a_{33} - a_{13}^2 < 0$
    2 rovnoběžné přímky
    $$\begin{aligned} p: &\quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}} \\ q: &\quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} - \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}} \end{aligned}$$
  - $a_{11} a_{33} - a_{13}^2 = 0$
    jedna (dvojnásobná) přímka $p: a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$
  - $a_{11} a_{33} - a_{13}^2 > 0$
    prázdná množina

Příklad (neregulární středová)

$$6x^2 - xy - 2y^2 + 5x + 6y - 4 = 0$$

- Matice a determinanty:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & 3 \\ \frac{5}{2} & 3 & -4 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \Delta = 0, \\ \delta = -\frac{49}{4} \end{array}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice k:

$$\lambda_1 = 2 + \frac{\sqrt{65}}{2}, \; \vec{u} = \frac{1}{|u|}(1, \; \sqrt{65} - 8)^T,$$

$$\lambda_2 = 2 + \frac{\sqrt{65}}{2}, \; \vec{v} = \frac{1}{|v|}(1, \; -16 - \sqrt{65})^T$$

- Střed: $S = \left[-\frac{2}{7}, \; \frac{11}{7}\right]$

- 2 různoběžky

$$(3x' - 2y')(2x' + y') = 0, \quad x = x' - \frac{2}{7}, y = y' + \frac{11}{7}$$

$$(3x - 2y + 4)(2x + y - 1) = 0 \text{ (z rozkladu rovnice)}$$

Příklad (neregulární středová)

$3x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$

- Determinanty: $\Delta = 0,\ \delta = 5$
- Střed: $S = [1,\ 1]$

Kuželosečce vyhovuje jediný bod, její střed.

Příklad (neregulární nestředová)

$9x^2 - 30xy + 25y^2 + 12x - 20y + 4 = 0$

- Determinanty: $\Delta = 0,\ \delta = 0$
- Ze soustavy rovnic pro určení středu zjistíme, že má ∞ řešení, tj. přímku.

  $\begin{pmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 9x - 15y = -6, \text{tj.} \\ 3x - 5y = -2 \end{array}$

  Tato přímka náleží kuželosečce, tj jedná se o dvojnásobnou přímku.

Kvadratické plochy

rovnice kvadratické plochy

$$\begin{array}{rrrrl} a_{11}x^2 & +2a_{12}xy & +2a_{13}xz & +2a_{14}x+ & \\ & +a_{22}y^2 & +2a_{23}yz & +2a_{24}y+ & \\ & & +a_{33}z^2 & +2a_{34}z+ & \\ & & & +a_{44} = & 0 \end{array}$$

maticový zápis

$$(x\ y\ z\ 1)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}}_{\mathcal{K}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

označení:

determinant kvadratické plochy: $\Delta = \det \mathcal{K}$,

"malý determinant": $\delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Klasifikace kvadratických ploch

regulární: $\Delta \neq 0$

- elipsoidy
- paraboloidy
- hyperboloidy

neregulární: $\Delta = 0$

- kuželové plochy
- válcové plochy

- rovnoběžné roviny
- různoběžné roviny
- přímka
- 1 bod
- prázdná množina

---

středové: $\delta \neq 0$ | **nestředové:** $\delta = 0$

soustava rovnic

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{14} \\ -a_{24} \\ -a_{34} \end{pmatrix}$$

má **jediné** řešení, souřadnice středu $[m, n, o] = [x, y, z]$

má buď ∞ řešení, nebo **řešení nemá**.

Kvadratické plochy v kanonickém tvaru

1. **Elipsoid**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2. **Hyperboloid**

jednodílný

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dvojdílný

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

3. **Paraboloid**

hyperbolický

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 2z$$

eliptický

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm 2z$$

4. **Kuželová plocha**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

5. **Válcová plocha**

eliptická

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hyperbolická

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

parabolická

$$\frac{x^2}{a^2} = \pm 2kz$$

Základní výpočty

Sestavíme matice $\mathcal{K}$, k:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Určíme determinanty: "velký" ($\Delta = \det \mathcal{K}$) a "malý" ($\delta = \det k$).

Určíme vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a **jednotkové** vlastní vektory $u = (u_x, u_y, u_z), v = (v_x, v_y, v_z), w = (w_x, w_y, w_z)$ matice k.

Určíme hodnost matice $\mathcal{K}$ ($h(\mathcal{K})$).

Určení typu kvadratické plochy

- $\Delta \neq 0, \delta \neq 0$: regulární středová ($\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$)

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mají stejná znaménka

elipsoid

znaménko $\dfrac{\Delta}{\delta}$

opačné λ_i
trojosý

stejné jako λ_i
imaginární

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nemají stejná znaménka
hyperboloid
např. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$

$\dfrac{\Delta}{\delta} > 0$
dvojdílný

$\dfrac{\Delta}{\delta} < 0$
jednodílný

- $\Delta \neq 0, \delta = 0$: regulární nestředová (jedno vl. č., např. λ_3, je nulové)
  paraboloid: $\lambda_1\lambda_2 > 0$ – eliptický $\lambda_1\lambda_2 < 0$ – hyperbolický
- $\Delta = 0, \delta \neq 0$: neregulární středová ($\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, $\dfrac{\Delta}{\delta} = 0$)

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mají stejná znaménka
jeden bod $[0, 0, 0]$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nemají stejná znaménka
kuželová plocha

- $\Delta = 0, \delta = 0$: neregulární nestředová

  hodnost matice $\mathcal{K}$ je
  - 3: válcová plocha – eliptická, hyperbolická, parabolická (nebo žádný reálný bod)
  - 2: přímka, dvojice rovin (nebo žádný reálný bod)
  - 1: dvojnásobná rovina

Regulární středové kvadriky ($\Delta \neq 0,\ \delta \neq 0$)

Každou středovou kvadriku lze převést vhodnou volbou kartézské soustavy souřadnic na kanonický tvar:

$$(x\ y\ z\ 1)\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{\delta} \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \quad (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0).$$

Střed kvadriky $S = [m, n, o]$ je počátek nové soustavy souřadnic.
Souřadnice středu určíme jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \\ o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{14} \\ -a_{24} \\ -a_{34} \end{pmatrix}$$

Osy kvadriky tvoří osy nové soustavy souřadnic.
Jsou ve směrech určených vlastními vektory a jejich rovnice jsou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ o \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix},\ X = S + q\vec{v},\ X = S + r\vec{w}\ \ p, q, r \in \mathbb{R}$$

Kvadriky eliptického typu

Všechna vlastní čísla mají **stejná znaménka**, např. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0.$
Pokud $\frac{\Delta}{\delta}$ má opačné znaménko, dostáváme rovnici v kanonickém tvaru:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (a^2 = -\tfrac{\Delta}{\lambda_1 \delta},\ b^2 = -\tfrac{\Delta}{\lambda_2 \delta},\ c^2 = -\tfrac{\Delta}{\lambda_3 \delta})$$

Kvadratická plocha je **trojosý elipsoid**

Pokud $\frac{\Delta}{\delta}$ má stejné znaménko jako λ_i, dostáváme rovnici v kanonickém tvaru:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \qquad (a^2 = -\tfrac{\Delta}{\lambda_1 \delta},\ b^2 = -\tfrac{\Delta}{\lambda_2 \delta},\ c^2 = -\tfrac{\Delta}{\lambda_3 \delta})$$

množina bodů je **prázdná (imaginární elipsoid)**.

Příklad

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 22x + 24y + 2z + 30 = 0$$

- Matice a determinanty

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 & -11 \\ -2 & 6 & -2 & 12 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ -11 & 12 & 1 & 30 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{ccr} \Delta & = & -4 \cdot 3^5 \\ \delta & = & 2 \cdot 3^4 \\ \frac{\Delta}{\delta} & = & -6 \end{array}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory

$\lambda_1 = 3,\ \vec{u} = (1, 2, 2),\ \lambda_2 = 6,\ \vec{v} = (2, 1, -2),\ \lambda_3 = 9,\ \vec{w} = (-2, 2, -1)$

- Kanonická rovnice

$$(x, y, z, 1) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 6 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} + \frac{3z^2}{2} = 1$$

Kvadriky hyperbolického typu

Vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nemají stejná znaménka. Předpokládejme, že $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$. Jestliže $\dfrac{\Delta}{\delta} > 0$, potom dostaneme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

Kvadrika se nazývá **dvojdílný hyperboloid.**

Jestliže $\dfrac{\Delta}{\delta} < 0$, potom dostaneme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

Kvadrika se nazývá **jednodílný hyperboloid**.

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta},\ b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2 \delta},\ c^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_3 \delta}$$

Regulární nestředové kvadriky ($\Delta \neq 0,\ \delta = 0$) paraboloidy

Regulární nestředovou kvadriku, pro jejíž vlastní čísla platí $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$ a $\lambda_3 = 0$, lze převést vhodnou volbou kartézské soustavy souřadnic na kanonický tvar

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2Gz = 0,$$

kde $G = (a_{14}, a_{24}, a_{34}) \cdot \vec{w}$ a $\vec{w}$ je jednotkový vlastní vektor, odpovídající $\lambda_3 = 0$. G je různé od nuly, jak plyne z determinantu Δ matice kvadriky

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & G & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 G^2$$

- vl. č. λ_1, λ_2 mají **stejná znaménka**, např. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ a $\lambda_3 = 0$.
  - $G < 0$: můžeme rovnici upravit

    $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

  - $G > 0$: dostaneme rovnici

    $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -2z.$$

  eliptický paraboloid

- vl.č. λ_1, λ_2 mají **různá znaménka**, např. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ a $\lambda_3 = 0$.
  - $G < 0$: dostaneme rovnici

    $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

  - $G > 0$: dostaneme rovnici

    $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2z.$$

  hyperbolický paraboloid

Příklad

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$$

- Matice a determinanty

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}, \ k = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{rcr} \Delta & = & 16 \\ \delta & = & 0 \end{array}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory

$\lambda_1 = 7,\ \vec{u} = (4,1,2),\ \lambda_2 = -2,\ \vec{v} = (1,-2,-1),\ \lambda_3 = 0,\ \vec{w} = (1,2,-3)$

- $G = (1,2,3) \cdot \dfrac{(1,-2,3)}{\sqrt{1+4+9}} = -\dfrac{4}{\sqrt{14}}$
- Kanonická rovnice

$$(x,y,z,1) \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{14}} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 7x^2 - 2y^2 = \frac{8}{\sqrt{14}} z$$

- Osa: průnik rovin, odpovídajících nenulovým vl. vektorům, vrchol: průsečík osy a $\mathcal{K}$

$\vec{u} \Rightarrow \rho:\ (4,1,2,0) \cdot \mathcal{K} \cdot (x,y,z,1)^T = 0 \Rightarrow 28x + 7y + 14z + 12 = 0$

$\vec{v} \Rightarrow \sigma:\ (1,2,-1,0) \cdot \mathcal{K} \cdot (x,y,z,1)^T = 0 \Rightarrow x - 2y - z + 3 = 0$

$V = \left[-\dfrac{617}{392}, -\dfrac{113}{196}, \dfrac{1011}{392}\right]$

Neregulární středové kvadriky ($\Delta = 0,\ \delta \neq 0$)

- Vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mají **stejná znaménka**.
  Potom dostaneme rovnici

  $$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

  které vyhovuje **jediný reálný bod** $[0,\ 0,\ 0]$.
- Vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ **nemají stejná znaménka**.
  Předpokládejme, že $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$.
  V tomto případě dostaneme rovnici

  $$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

  Kvadriku nazýváme **kuželová plocha**.

Neregulární nestředové kvadriky ($\Delta = 0, \delta = 0$)

1) Hodnost matice $\mathcal{K}$ je **tři**.

a) Jedno vl.č. je **nulové**, např.$\lambda_{1,2} \neq 0, \lambda_3 = 0$.

b) Jedno vl. č. je **nenulové**, např. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

a)Soustavě rovnic pro určení středu vyhovuje **přímka středů**.

Uvažujme matici kvadriky ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & G & 0 \end{pmatrix}$$

$N = (a_{14}, a_{24}, a_{24})X + a_{44}, N \neq 0 \qquad G \neq 0$

X je libovolný bod přímky středů

jedná se o válcovou plochu

a) $\lambda_1\lambda_2 > 0$ eliptickou $\quad \lambda_1\lambda_2 < 0$ hyperbolickou $\quad$ **b)** parabolickou

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = N \qquad \lambda_1 x^2 = -2Gz$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} = \pm 2pz$$

Neregulární nestředové kvadriky ($\Delta = 0, \delta = 0$)

2) Hodnost matice $\mathcal{K}$ je **dva**.

a) Jedno vl.č. je **nulové**,
např.$\lambda_{1,2} \neq 0, \lambda_3 = 0$.

b) Jedno vl. č. je **nenulové**,
např. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Uvažujme matici kvadriky ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$$

$\lambda_1 \lambda_2 > 0$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ přímka

$\lambda_1 \lambda_2 < 0$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ 2 roviny

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H \end{pmatrix}, H \neq 0$$

$$\lambda_1 x^2 = H$$

$\lambda_1 H < 0$: $\frac{x^2}{a^2} = 1$ 2 roviny

$\lambda_1 H > 0$: $\frac{x^2}{a^2} = -1$ $\emptyset$

Neregulární nestředové kvadriky ($\Delta = 0, \delta = 0$)

3) Hodnost matice $\mathcal{K}$ je **jedna**.
Jedno vl. č. je **nenulové**,
např. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Matice kvadriky

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

odpovídá

$$\lambda_1 x^2 = 0$$

dvojnásobná rovina

Příklad

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4\sqrt{2}xy + 2yz + 6x + 2y(2\sqrt{2} - 1) - 6z - 9 = 0$$

- $\Delta = 0,\ \delta = 0 \Rightarrow$ neregulární nestředová
- Vlastní čísla a vl. vektory
  $\lambda_1 = 3, \vec{u} = (\sqrt{2}, 0, -4),$
  $\lambda_2 = 6, \vec{v} = (3\sqrt{2}, 3, 1),$
  $\lambda_3 = 0, \vec{w} = (2\sqrt{2}, -3, 1)$
- Hodnost matice $\mathcal{K}$ je 3.
- Matice kvadriky

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix}$$

- Přímka středů $X = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} - 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} t,$
  vybereme libovolný bod, např. $t = 1 \Rightarrow [m, n, o] = [-1, 0, 1]$
  $N = a_{14}m + a_{24}n + a_{34}o = -15$
- Kanonická rovnice $3x^2 + 6y^2 = 15$ eliptická válcová plocha

Příklad

$$8x^2 - 8y^2 - 3z^2 - 12xy + 10xz + 10yz - 2x + 14y - 10z - 3 = 0$$

- $\Delta = 0,\ \delta = 0 \Rightarrow$ neregulární nestředová
- 1 vlastní číslo nulové ($\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{609}}{2}$)
- přímka středů: $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{7}{10} \\ 1 \end{pmatrix} t$, (náleží kvadrice)
- Hodnost matice $\mathcal{K}$ je 2.
- Matice kvadriky

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{609}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{609}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- dvojice různoběžných rovin

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{609}}{2}\right) x'^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{609}}{2}\right) y'^2 = 0$$

$(4x + 2y - z - 3)(2x - 4y + 3z + 1) = 0$ (rozložením zadané rovnice)

Úloha první: maticová

1. Zjistit, jaké slovo se ukrývá v zadané matici.
2. Uvést typ zadané kuželosečky a její kanonickou rovnici.
3. Uvést typ zadané kvadratické plochy a její kanonickou rovnici.