Prostá iterační metoda-příklad

Dána soustava rovnic ve tvaru **x**=U**x**+**v**, kde $U=\begin{pmatrix}0.4 & -0.1 & 0\\ 0.1 & 0.2 & 0.4\\ 0 & -0.4 & 0.4\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

a) Ověřte, že soustavu lze řešit prostou iterační metodou.

Existuje norma matice U, která je menší než 1 (např. řádková: $||U||_\propto=0.8$), je splněna postačující podmínka konvergence.

b) Volte $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ a vypočtěte $x^{(1)}$ a $x^{(2)}$ prostou iterační metodou.

$$x^{(1)}=\overbrace{\begin{pmatrix}0.4 & -0.1 & 0\\ 0.1 & 0.2 & 0.4\\ 0 & -0.4 & 0.4\end{pmatrix}}^{U}\overbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}^{x^{(0)}}+\overbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}^{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad x^{(2)}=\overbrace{\begin{pmatrix}0.4 & -0.1 & 0\\ 0.1 & 0.2 & 0.4\\ 0 & -0.4 & 0.4\end{pmatrix}}^{U}\overbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}^{x^{(1)}}+\overbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}^{v}=\begin{pmatrix}1.2\\3.7\\3.4\end{pmatrix}$$

c) Odhadněte velikost chyby $x^{(2)}$.

$$\|x^*-x^{(2)}\|_\infty\le\frac{\|U\|_\infty}{1-\|U\|_\infty}\|x^{(2)}-x^{(1)}\|_\infty\Rightarrow\|x^*-x^{(2)}\|_\infty\le\frac{0.8}{1-0.8}\left\|\begin{pmatrix}0.2\\1.7\\0.4\end{pmatrix}\right\|_\infty\Rightarrow\|x^*-x^{(2)}\|_\infty\le\frac{0.8}{0.2}\cdot1.7=6.4$$

d) Určete počet iterací potřebných k výpočtu $x^{(k)}$ s chybou < 0.1.

$$\|x^*-x^{(k)}\|_\infty\le0.1\Rightarrow\frac{\|U\|_\infty^k}{1-\|U\|_\infty}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty\le0.1\Rightarrow\frac{0.8^k}{1-0.8}.3\le0.1\Rightarrow0.8^k\le\frac{0.1\cdot0.2}{3}\Rightarrow k\ln0.8\le\ln\frac{0.02}{3}\Rightarrow k\ge22.45$$

Je potřeba 23 iterací.

Jacobiova metoda - příklad

Dána soustava rovnic Ax=b, kde $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) Ověřte, že danou soustavu lze řešit Jacobiovou metodou.

b) Určete spektrální poloměr Jacobiovy matice.

c) Volte $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ a určete $x^{(1)}$ a $x^{(2)}$ Jacobiovou metodou.

---

a) Matice A je ostře diagonálně dominantní, je splněna postačující podmínka konvegrence Jacobiovy metody.

b) Vlastní čísla matice U_J určíme z výrazu $\det \begin{pmatrix} 4\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 4\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 4\lambda \end{pmatrix} = 0$

$$64\lambda^3 - 8\lambda - 8\lambda = 0 \Rightarrow 16\lambda(4\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{2}$$

tedy $\rho(U_J)=0.5$

Jacobiova metoda - příklad

c) Z první rovnice vyjádříme x_1, z druhé x_2, ze třetí x_3.

$$x_1 = \frac{1}{4}(5 - x_2)$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(1 - 2x_1 - x_3)$$
$$x_3 = \frac{1}{4}(4 - 2x_2)$$

Při výpočtu první iterace $\mathbf{x}^{(1)}=(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$ (levá strana) dosadíme do výrazů na pravé straně hodnoty $\mathbf{x}^{(0)}=(0,0,0)$.

Dostáváme $\mathbf{x}^{(1)}=(5/4,1/4,1)^T$.

Při výpočtu druhé iterace $\mathbf{x}^{(2)}=(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})$ (levá strana) dosadíme do výrazů na pravé straně hodnoty $\mathbf{x}^{(1)}$.

Dostáváme

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{4}\right) = \frac{19}{16}$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{4}\left(1 - 2 \cdot \frac{5}{4} - 1\right) = -\frac{5}{8} -$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4 - 2 \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}$$

Gaussova-Seidelova metoda – příklad

Dána soustava rovnic A**x**=**b**, kde

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}5\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$$

a) Ověřte, že danou soustavu lze řešit Gaussovou-Seidelovou metodou.

b) Určete spektrální poloměr Gaussovy-Seidelovy matice.

c) Volte $\mathbf{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$ a určete $\mathbf{x}^{(1)}$ a $\mathbf{x}^{(2)}$ Gaussovou-Seidelovou metodou.

---

a) Matice A je ostře diagonálně dominantní, je splněna postačující podmínka konvegrence Gaussovy-Seidelovy metody.

b) Vlastní čísla matice U_G určíme z výrazu $\det\begin{pmatrix}4\lambda & 1 & 0\\ 2\lambda & 4\lambda & 1\\ 0\lambda & 2\lambda & 4\lambda\end{pmatrix}=0$

$$64\lambda^3-8\lambda^2-8\lambda^2=0\Rightarrow 16\lambda^2(4\lambda-1)=0\Rightarrow \lambda_1=0,\lambda_2=0,\lambda_3=\frac{1}{4}$$

tedy $\rho(U_G)=0.25$

Gaussova-Seidelova metoda – příklad

c) Z první rovnice vyjádříme x_1, z druhé x_2, ze třetí x_3.

$$x_1 = \frac{1}{4}(5 - x_2), x_2 = \frac{1}{4}(1 - 2x_1 - x_3), x_3 = \frac{1}{4}(4 - 2x_2)$$

Výpočet první iterace:

Změny vektoru $\mathbf{x}^{(0)}$ na $\mathbf{x}^{(1)}$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5/4 \\ -3/8 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5/4 \\ -3/8 \\ 17/16 \end{pmatrix} = x^{(1)}$$

$$x_1^{(1)} \overset{(x_2=0)}{\overbrace{=}} \frac{1}{4}(5) = \frac{5}{4}$$

$$x_2^{(1)} \overset{(x_1=\frac{5}{4}, x_3=0)}{\overbrace{=}} \frac{1}{4}\left(1 - 2\cdot\frac{5}{4} - 0\right) = -\frac{3}{8}$$

$$x_3^{(1)} \overset{(x_2=\frac{-3}{8})}{\overbrace{=}} \frac{1}{4}\left(4 - 2\cdot\frac{-3}{8}\right) = \frac{17}{16}$$

Výpočet druhé iterace:

Změny vektoru $\mathbf{x}^{(1)}$ na $\mathbf{x}^{(2)}$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -3/8 \\ 17/16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 43/32 \\ -3/8 \\ 17/16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 43/32 \\ -5/32 \\ 17/16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 43/32 \\ -5/32 \\ 23/64 \end{pmatrix} = x^{(2)}$$

$$x_1^{(2)} \overset{(x_2=\frac{-3}{8})}{\overbrace{=}} \frac{1}{4}\left(5 - \frac{-3}{8}\right) = \frac{43}{32}$$

$$x_2^{(2)} \overset{(x_1=\frac{43}{32}, x_3=\frac{17}{16})}{\overbrace{=}} \frac{1}{4}\left(1 - 2\cdot\frac{43}{32} - \frac{17}{16}\right) = -\frac{5}{32}$$

$$x_3^{(2)} \overset{(x_2=\frac{-5}{16})}{\overbrace{=}} \frac{1}{4}\left(4 - 2\cdot\frac{-5}{32}\right) = \frac{23}{64}$$