

Nevlastní integrál

Seminář poslední

16. prosince 2019

Připomenutí: Riemannův integrál

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

- uzavřený a omezený interval $\langle a, b \rangle$
- funkce $f(x)$ je definovaná a omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$
(a má nejvýše konečný počet bodů nespojitosti na tomto intervalu)
- $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$

Pokud

- interval **není omezený**
nebo
- funkce $f(x)$ **není omezená** na intervalu $\langle a, b \rangle$

zkoumáme konvergenci nebo divergenci **nevlastního integrálu**.

Nevlastní integrál na neomezeném intervalu

- $\langle a, +\infty \rangle$, $(-\infty, b\rangle$, $(-\infty, \infty)$

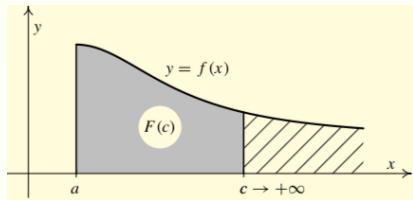
Uvažujme funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $\langle a, +\infty \rangle$, $a \in \mathbb{R}$, takovou, že **pro každé $c > a$ existuje určitý integrál** $\int_a^c f(x) dx$.

Pak můžeme definovat funkci F vztahem

$$F(c) = \int_a^c f(x) dx, \quad c \geq a.$$

Nechť existuje

$$\lim_{c \rightarrow \infty} F(c) = I, \quad I \in \mathbb{R}.$$



Pak řekneme, že

nevlastní integrál $\int_a^\infty f(x) dx$ konverguje a jeho hodnota je I .

Pokud **limita je nevlastní** nebo **limita neexistuje**, říkáme, že **integrál diverguje**.

Nevlastní integrál z neomezené funkce

Uvažujme funkci f definovanou na intervalu $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, která není na intervalu $\langle a, b \rangle$ omezená, takovou, že **pro každé $c \in (a, b)$ existuje určitý integrál $\int_a^c f(x) dx$.**

(v žádném levém δ -okolí bodu b není funkce omezená)

Pak můžeme definovat funkci F vztahem

$$F(c) = \int_a^c f(x) dx, \quad a \leq c < b$$

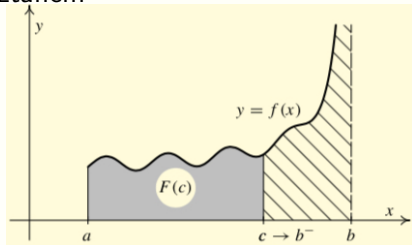
Nechť existuje

$$\lim_{c \rightarrow b^-} F(c) = I, \quad I \in \mathbb{R}.$$

Pak řekneme, že

nevlastní integrál $\int_a^b f(x) dx$ konverguje a jeho hodnota je I .

Pokud **limita je nevlastní** nebo **limita neexistuje**, říkáme, že **integrál diverguje**.



Příklady

- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$

- $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

- $\int_0^{\infty} e^{-3x} dx$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

- $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

- $\int_0^{1/e} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

- $\int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx$

- $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

- $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

- $\int_0^1 x \ln x dx$

- $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

- $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$

- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx$

Příklady

- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x+1)} dx$

- $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx$

- $\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx$

- $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$