Varianta B: Pohyb planety

Pohyb tělesa v gravitačním poli nehybného centrálního tělesa. Celou úlohu omezíme na pohyb v rovině.
Mějme nehybné těleso o hmotnosti M v počátku souřadnic.
Okolo tohoto tělesa se pohybuje druhé těleso o hmotnosti m,
které se v daný okamžik nachází v bodě o souřadnicích $\vec{r} = [r_x, r_y]$ a má rychlost $\vec{v} = (v_x, v_y)$.
Na toto těleso působí gravitační síla

$$F = \kappa \frac{mM}{r^3} \vec{r}, \quad r^3 = \left(\sqrt{r_x^2 + r_y^2}\right)^3$$

Pohybový zákon (zrychlení je úměrné síle) → pohybová rovnice 2. řádu.

$$\frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F(\vec{r})}{m}$$

Zavedením rovnice pro rychlost převedeme na soustavu rovnic 1.řádu.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{F(\vec{r})}{m} \end{aligned} \quad \text{zapsáno po složkách} \quad \begin{aligned} r_x' &= v_x \\ r_y' &= v_y \\ v_x' &= \frac{F_x}{m} = \frac{\kappa M}{\left(\sqrt{r_x^2 + r_y^2}\right)^3} r_x \\ v_y' &= \frac{F_y}{m} = \frac{\kappa M}{\left(\sqrt{r_x^2 + r_y^2}\right)^3} r_y \end{aligned}$$

Označíme

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix},$$

derivace:

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \frac{\kappa M}{r^3} r_x \\ \frac{\kappa M}{r^3} r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \frac{\kappa M}{(y_1^2 + y_2^2)^3} y_1 \\ \frac{\kappa M}{(y_1^2 + y_2^2)^3} y_2 \end{pmatrix}$$

Dodáme počáteční podmínky: počáteční polohu a rychlost tělesa.
Můžeme řešit numerickými metodami.
Zobrazení řešení: pro hodnoty t, ve kterých jsme počítali,
jsou v prvním a druhém řádku vypočítány x-ové a y-ové souřadnice trajektorie pohybu.

Varianta C: Liška honí králíčka

Úlohu o pronásledování (angl. pursuit problem) lze modelovat soustavou diferenciálních rovnic.
Předpokládejme, že králík se pohybuje po dráte popsané v rovině $(r_1(t), r_2(t))$,
například po spirále, tj. $\begin{array}{l} r_1(t) = \sqrt{1+t}\cos t \\ r_2(t) = \sqrt{1+t}\sin t \end{array}$.
Liška se snaží chytit králíka a pohybuje se po takové dráze, že
a) v každém časovém okamžiku směr pohybu lišky je do bodu, ve kterém se nachází králík a
b) rychlost pohybu lišky je konstanta k-násobek rychlosti pohybu králíka.
Potom dráhu pohybu lišky $(y_1(t), y_2(t))$ popisuje soustava rovnic

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt}y_1(t) = s(r)(r_1(t) - y_1(t)) \\ \frac{d}{dt}y_2(t) = s(r)(r_2(t) - y_2(t)) \end{array} ,$$

kde

$$s(t) = \frac{k \cdot \sqrt{\left(\dfrac{d}{dt}r_1(t)\right)^2 + \left(\dfrac{d}{dt}r_2(t)\right)^2}}{\sqrt{\left(r_1(t) - y_1(t)\right)^2 + \left(r_2(t) - y_2(t)\right)^2}}$$

Řešte tuto soustavu numerickými metodami, zobrazte trajektorie řešení pro různé počáteční podmínky a různé konstanty k. Popište chování řešení.
Uvažujte i jiné trajektorie $r(t)$.

Varianta D: Růst bakterií, nasazení antiséra

Společenstvo bakterií se rozmnožuje s rychlostí úměrnou okamžitému počtu bakterií v daný čas.
Po 3 hodinách bylo zjištěno, že ve společenstvu je přítomno 400 bakterií, za 10 hodin bylo ve společenstvu přítomno již 2000 bakterií.
Jaký byl počáteční počet bakterií ve společenstvu v okamžiku kdy jsme jev začali pozorovat ?
Kolik bude bakterií ve společenstvu po 24 hodinách ?
Po 48 hodinách jsme nasadili účinné antisérum, které hubí bakterie s rychlostí přímo úměrnou kvadrátu okamžitého počtu přítomných bakterií v daný čas.
Za 10 hodin od okamžiku nasazení antiséra bylo zjištěno, že ve společenstvu je 5 krát tolik bakterií kolik jich bylo v okamžiku nasazení antiséra.
Jak se bude vyvíjet společenstvo bakterií dál ?

Varianta E: Infúze léku pacientovi

Pacientovi byl nasazen infúzí lék.
Do jeho krevního oběhu proniká konstantní rychlostí $0,01mg$ za sekundu lék. Současně však organismus tuto látku z krve odbourává rychlostí úměrnou okamžitému množství látky v krvi. Pacient má $4,7$ litrů krve. Za tři hodiny od okamžiku, kdy byla infúze nasazena, bylo v krvi pacienta naměřeno $13\mu g$ léku na každý mililitr krve (13 promile).
Sestavte diferenciální rovnici, která určuje okamžité množství léku v krvi pacienta v závislosti na čase. Načrtněte průběh této závislosti graficky.
Po 48 hodinách je infúze přerušena.
Jaké je množství léku v krvi pacienta v okamžiku, kdy je infúze přerušena.
Jak dlouho potom zůstane v krevním oběhu ještě koncentrace léku do $1\mu g$ na každý mililitr krve.
(Předpokládejte, že rychlost odbourávání je stále úměrná okamžitému množství látky v krvi.)

Varianta F: Rychlost učení a čas potřebný k zapamatování

V teorii učení bylo empiricky zjištěno, že rychlost, s jakou se člověk dokáže naučit určité množství látky (textu), je přímo úměrná množství látky, které ještě zbývá k naučení.
Nechť M je celkové množství látky k naučení a $A(t)$ množství látky naučené v čase t.
Nalezněte a vyřešte diferenciální rovnici pro množství naučené látky A.
Následně vezměte v úvahu faktor zapomínání, který je přímo úměrný relativnímu množství informací v čase t a rychlosti učení (časové změně naučených informací).
Nalezněte časovou závislost pro množství zapamatovaných informací (= množství naučených od něhož bylo odečteno množství zapomenutých informací).
Určitá osoba se za 1 hodinu naučila 2/5 veškerého textu. Dále se u této osoby testem ukázalo, že z těchto $2/5M$ se 12% nevstřebalo do paměti (bylo zapomenuto).
Dopočtěte partikulární řešení na základě těchto uvedených parametrů.
Za jak dlouho se dotyčná osoba naučí a za jak dlouho si zapamatuje polovinu veškerých informací, 75% veškerých informací, 90% veškerých informací ?