Cvičení 9

Lineární ODR 2. řádu: řešení pomocí mocninných řad

20.11.2019

Lineární ODR 2. řádu s proměnnými koeficienty

Cauchyova úloha

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(x_0) = \mathbf{a},\ y'(x_0) = \mathbf{b}$$

Existence a jednoznačnost řešení

Jsou li funkce $p(x), q(x), f(x)$ spojité v intervalu $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ (a $x_0 \in \mathcal{I}$), má Cauchyova úloha jediné řešení v intervalu $\mathcal{I}$.

Řešení ve tvaru součtu mocninné řady

Jestliže jsou funkce $p(x), q(x), f(x)$ rozvinutelné v mocninnou řadu se středem v bodě x_0 v intervalu $\mathcal{J} = (x_0 - R, x_0 + R),\ R > 0$, potom řešení Cauchyovy úlohy je součtem mocninné řady v intervalu $\mathcal{J}$.

$$y(x) = \mathbf{a} + \mathbf{b}(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{c}_k (x - x_0)^k,\ x \in \mathcal{J}$$

Příklad 1.

$$y'' + \sin(x)y' + \frac{x}{x^2+4}y = \ln(x+1), \quad y(0) = \mathbf{a}, \; y'(0) = \mathbf{b}$$

Postup řešení

1. Existence a jednoznačnost řešení: $p(x) = \sin(x)$, $q(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ jsou spojité $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1)$ je spojitá pro $x \in (-1, \infty)$. Cauchyova úloha má jediné řešení v intervalu $\mathcal{I} = (-1, \infty)$.
2. Rozvineme funkce $\sin(x)$, $\dfrac{x}{x^2+4}$ a $\ln(x+1)$ v mocninnou řadu se středem v $x_0 = 0$ a určíme interval $\mathcal{J}$, ve kterém všechny tři řady konvergují.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

$$\frac{x}{x^2+4} = x\frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{x^2}{4}} = x\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{4^{k+1}}, x \in (-2, 2)$$

$$\ln(x+1) = \int \frac{dx}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad x \in (-1, 1)$$

Všechny tři Taylorovy řady konvergují v intervalu $\mathcal{J} = (-1, 1)$.

Aproximace řešení polynomem 5. stupně.

$$y'' + \sin(x)y' + \frac{x}{x^2+4}y = \ln(x+1), \quad y(0) = \mathbf{a},\ y'(0) = \mathbf{b}$$

1. V intervalu $\mathcal{J}$ budeme hledat přibližné řešení ve tvaru
$$y = \mathbf{a} + \mathbf{b}x + \mathbf{c}x^2 + \mathbf{d}x^3 + \mathbf{e}x^4 + \mathbf{f}x^5$$

2. Vyjádříme y' y''
$$y' = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}x + 3\mathbf{d}x^2 + 4\mathbf{e}x^3 + 5\mathbf{f}x^4 \quad y'' = 2\mathbf{c} + 6\mathbf{d}x + 12\mathbf{e}x^2 + 20\mathbf{f}x^3$$

3. Funkce $\sin x, \dfrac{x}{x^2+4}, \ln(x+1)$ aproximujeme polynomy 3. stupně.
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} \qquad \frac{x}{x^2+4} = \frac{x}{4} - \frac{x^3}{16} \qquad \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

4. $\sin(x)y'$ a $\dfrac{x}{x^2+4}y$ aproximujeme polynomy 3. stupně.
$$\sin(x)y' = \mathbf{b}x + 2\mathbf{c}x^2 + \left(3\mathbf{d} - \frac{\mathbf{b}}{6}\right)x^3, \frac{x}{x^2+4}y = \frac{\mathbf{a}}{4}x + \frac{\mathbf{b}}{4}x^2 + \left(\frac{\mathbf{c}}{4} - \frac{\mathbf{a}}{16}\right)x^3$$

5. Hledané koeficienty určíme porovnáním koeficientů u stejných mocnin x na levé a pravé straně rovnice.

Určení koeficientů a,b,c,d,e,f

$$y'' + \sin(x)y' + \frac{x}{x^2+4}y = \ln(x+1), \quad y(0) = \mathbf{0},\ y'(0) = \mathbf{-5}$$

Hledané **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f** určíme porovnáním koeficientů u stejných mocnin x na levé a pravé straně rovnice.

		x^0	x^1	x^2	x^3
levá strana rovnice	y''	$2\mathbf{c}$	$6\mathbf{d}$	$12\mathbf{e}$	$20\mathbf{f}$
	$\sin(x)y'$	0	$\mathbf{b}$	$2\mathbf{c}$	$3\mathbf{d} - \frac{\mathbf{b}}{6}$
	$\frac{x}{x^2+4}y$	0	$\frac{\mathbf{a}}{4}$	$\frac{\mathbf{b}}{4}$	$\frac{\mathbf{c}}{4} - \frac{\mathbf{a}}{16}$
pravá strana rovnice	$\ln(x+1)$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

- $\mathbf{a} = y(0) = 0, \mathbf{b} = y'(0) = -5$ určíme z počátečních podmínek.
- x^0 : $2c = 0 \Rightarrow \mathbf{c} = 0$
- x^1 : $6d - 5 = 1 \Rightarrow \mathbf{d} = 1$
- x^2 : $12e - \frac{5}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{e} = \frac{1}{16}$
- x^3 : $20f + 3 - \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathbf{f} = -\frac{11}{120}$

Závěr. V okolí bodu $x_0 = 0$, pro $x \in \mathcal{J} = (-1, 1)$, lze řešení $y(x)$ Cauchyovy úlohy aproximovat polynomem $p_5(x) = -5x + x^3 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{11}{120}x^5$.

Příklad 2.

Dána Cauchyova úloha pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu:

$$y'' + y'\frac{1}{x+1} + 2y = \mathrm{e}^{2x}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

1. Ukažte, že daná Cauchyova úloha má právě jedno řešení v intervalu $\mathcal{I}$ a určete tento interval. (*spojitost koeficientů*)
   $\frac{1}{x+1}$ je spojitá na $\mathcal{I}_1 = (-\infty, -1)$ a $\mathcal{I}_2 = (-1, \infty)$; $x_0 = 0 \in \mathcal{I}_2$
   $2,\ \mathrm{e}^{2x}$ spojité $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{I} = \mathcal{I}_2 \cap \mathbb{R} = (-1, \infty)$
2. Ukažte, že existuje řešení ve tvaru součtu mocninné řady se středem v bodě $x_0 = 0$ a určete interval $\mathcal{J}$, v němž je řešení úlohy součtem řady. (*Zapíšeme $\frac{1}{x+1}, \mathrm{e}^{2x}$ ve tvaru mocninné řady a určíme interval, ve kterém všechny řady konvergují.*)
   - $\frac{1}{x+1} \underbrace{=}_{|x|<1} \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = 1 - x + x^2 - x^3 \cdots \Rightarrow \mathcal{J}_1 = (-1, 1)$
   - $\mathrm{e}^{2x} = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots \Rightarrow \mathcal{J}_2 = \mathbb{R}$

   $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2 = (-1, 1)$

3. Aproximujte toto řešení polynomem 4. stupně.
Hledáme $y = \mathbf{a} + \mathbf{b}x + \mathbf{c}x^2 + \mathbf{d}x^3 + \mathbf{e}x^4$

- $y' = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}x + 3\mathbf{d}x^2 + 4\mathbf{e}x^3, \qquad y'' = 2\mathbf{c} + 6\mathbf{d}x + 12\mathbf{e}x^2$
- $y'\frac{1}{x+1}$ aproximujeme polynomem 2. stupně
  $y'\frac{1}{x+1} = \left(\mathbf{b} + 2\mathbf{c}x + 3\mathbf{d}x^2 + \dots\right)(1 - x + x^2 + \dots) \doteq$
  $\doteq \mathbf{b} + (2\mathbf{c} - \mathbf{b})x + 3(\mathbf{d} - 2\mathbf{c} - \mathbf{b})x^2$
- V rovnici $y'' + y'\frac{1}{x+1} + 2y = \mathrm{e}^{2x}$ nahradíme funkce jejich aproximacemi polynomy

$$\underbrace{2\mathbf{c} + 6\mathbf{d}x + 12\mathbf{e}x^2}_{y''} + \underbrace{\mathbf{b} + (2\mathbf{c} - \mathbf{b})x + 3(\mathbf{d} - 2\mathbf{c} - \mathbf{b})x^2}_{y'\frac{1}{x+1}} + \underbrace{2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}x + 2\mathbf{c}x^2}_{2y} = \underbrace{1 + 2x + 2x^2}_{\mathrm{e}^{2x}}$$

- Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x.

		x^0	x^1	x^2
levá strana rovnice	y''	$2\mathbf{c}$	$6\mathbf{d}$	$12\mathbf{e}$
	$\frac{1}{x+1}y'$	$\mathbf{b}$	$2\mathbf{c} - \mathbf{b}$	$3\mathbf{d} - 2\mathbf{c} - \mathbf{b}$
	$2y$	$2\mathbf{a}$	$2\mathbf{b}$	$2\mathbf{c}$
pravá strana rovnice	e^{2x}	1	2	2

$\mathbf{a} = 1, \qquad \mathbf{b} = 2$
$2c + 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = -\frac{3}{2}$
$6d - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2}$

Závěr $\boxed{y = 1 + 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4,\ x \in (-1,1)}$

Příklad 3.

Dána Cauchyova úloha pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu:

$$y'' + y \cdot \mathrm{arctg} x = \mathrm{e}^x \cos x, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 2$$

1. Ukažte, že daná Cauchyova úloha má právě jedno řešení v intervalu $\mathcal{I}$ a určete tento interval.

   $\mathrm{arctg} x, \mathrm{e}^x \cos x$ jsou spojité v $\mathbb{R}$, tedy $\mathcal{I} = \mathbb{R}$.

2. Ukažte, že existuje řešení ve tvaru součtu mocninné řady se středem v b. $x_0 = 0$ a určete interval $\mathcal{J}$, v němž je řešení úlohy součtem řady.

   - $$\mathrm{arctg} x = \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\text{pro}|x|<1} \int \sum_{k=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \int (-1)^k x^{2k} \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \dots .$$

     Řada konverguje v $\mathcal{J}_1 = (-1, 1)$

   - $$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

     konvergují $\forall x \in \mathbb{R}$

$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cap \mathbb{R} = (-1, 1)$

3. Aproximujte toto řešení polynomem 5. stupně.

Hledáme $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$

- $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4$
  $y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3$
- $$y \cdot \operatorname{arctg} x = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots)(x - \frac{x^3}{3} + \dots) =$$
  $$= a_0x + a_1x^2 + (a_2 - \tfrac{a_0}{3})x^3 + \dots$$
- $$e^x \cos x = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots)(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots) =$$
  $$= 1 + x + 0x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + \dots$$
- $y'' + y \cdot \operatorname{arctg} x = e^x \cos x \Rightarrow$
  $$\underbrace{2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3}_{y''} + \underbrace{a_0x + a_1x^2 + (a_2 - \frac{1}{3})x^3}_{y \operatorname{arctg} x} = \underbrace{1 + x - \frac{1}{3}x^3}_{e^x \cos x}$$
- Z počátečních podmínek: $a_0 = -1, a_1 = 2$.
- Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x:
  $2a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$, $6a_3 + a_0 = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}$,
  $12a_4 + a_1 = 0 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{6}, 20a_5 + a_2 - \frac{a_0}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a_5 = -\frac{7}{120}$

Závěr $$\boxed{y = -1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{7x^5}{120}, \ x \in (-1, 1)}$$