Cvičení 8

Lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty

13.11.2019

Obsah

Lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty

Základní tvar rovnice

$$y'' + py' + qy \underbrace{= \ 0}_{\text{homogenní}} \qquad y'' + py' + qy \underbrace{= \ f(x)}_{\text{nehomogenní}} \qquad \boxed{p, q \in \mathbb{R}}$$

Homogenní rovnice

- má **triviální** řešení $y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}$
- Cauchyova úloha: $y'' + py' + qy = 0, \ y(x_0) = a, y'(x_0) = b$
  má **jediné maximální řešení** pro libovolnou volbu x_0, a, b.
  Toto řešení je definováno pro $x \in \mathbb{R}$.
- **Fundamentální systém řešení**
  Jestliže dvě funkce φ_1 a φ_2 jsou dvě řešení homogenní rovnice v intervalu $(-\infty, \ \infty)$ a jsou lineárně nezávislé v intervalu $(-\infty, \ \infty)$, pak jejich **lineární kombinace**
  $$y(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x), \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$
  je **obecným řešením** homogenní rovnice.
  Říkáme, že funkce $\varphi_1, \ \varphi_2$ tvoří **fundamentální systém řešení**.
- Známe-li fundamentální systém řešení homogenní rovnice, pak pro zadané počáteční podmínky x_0, a, b určíme maximální řešení Cauchyovy úlohy, dopočítáme-li konstanty C_1 a C_2.

Určení fundamentálního systému řešení homogenní rovnice

Řešení diferenciální rovnice $\boxed{y'' + py' + qy = 0}$ hledáme ve tvaru $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$ určíme z **charakteristické rovnice**

$$\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}$$

kořeny charakteristické rovnice		fundamentální systém řešení
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\varphi_1 = e^{\lambda_1 x}$, $\varphi_2 = e^{\lambda_2 x}$
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\varphi_1 = e^{\lambda_1 x}$, $\varphi_2 = x e^{\lambda_1 x}$
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) = \alpha \neq 0$	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$	$\varphi_1 = e^{\alpha x} \cos \omega x$, $\varphi_2 = e^{\alpha x} \sin \omega x$
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) = \alpha = 0$	$\lambda_{1,2} = \pm i\omega$	$\varphi_1 = \cos \omega x$, $\varphi_2 = \sin \omega x$

Obecné řešení homogenní rovnice:

$$y_H = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$$

Partikulární řešení rovnice se speciální pravou stranou

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Obecné řešení je součtem obecného řešení homogenní rovnice y_H a partikulárního řešení, odpovídajícího pravé straně y_P.

$$y_{ob} = y_H + y_p$$

Speciální pravá strana

$$f(x) = \mathrm{e}^{ax} \cdot (p_{m_1}(x)\cos(bx) + q_{m_2}(x)\sin(bx))$$

obsahuje pouze funkce e^x, $\cos x$, $\sin x$ násobené polynomy $p(x), q(x)$ (stupňů m_1, m_2).

Metoda neurčitých koeficientů

1. Odhad partikulárního řešení. y_P bude obsahovat stejné $\mathrm{e}^{ax}, \cos(bx), \sin(bx)$ jako pravá strana, vynásobené polynomy s neznámými konstantami $A_0, \ldots, A_M, B_0, \ldots, B_M$; M je stupeň polynomu $= \max(m_1, m_2)$

$$y_P = \mathrm{e}^{ax} \cdot (p_M(x)\cos(bx) + q_M(x)\sin(bx)) \cdot \mathbf{x^k}$$

$$y_P = \mathrm{e}^{ax}\left((A_0 + A_1x + \cdots + A_M)\cos(bx) + (B_0 + B_1x + \cdots + B_M)\sin(bx)\right)\mathbf{x^k}$$

Je-li $\lambda = \mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$ kořenem charakteristické rovnice, vynásobíme $y_P \cdot \mathbf{x^k}$, kde $\mathbf{k}$ je násobnost tohoto kořene.

2. Určení koeficientů $A_0, \ldots, A_M, B_0, \ldots, B_M$ porovnáním koeficientů po dosazení y_P do rovnice

3. **Ověření, že y_p je řešením diferenciální rovnice**

Příklad

Je dána lineární diferenciální rovnice

$$y'' + y' - 12y = f(x)$$

Pro odpovídající homogenní rovnici je fundamentální systém řešení $\{e^{-4x},\ e^{3x}\}$ a obecné řešení $y_H = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}$.
Určete partikulární řešení pro pravou stranu $f(x)$:

1. $f(x) = 4$
2. $f(x) = x$
3. $f(x) = 2x^2$
4. $f(x) = e^x$
5. $f(x) = e^{-4x}$
6. $f(x) = \sin(x)$
7. $f(x) = \cos(3x)$

P R O   Z V Í D A VÉ

Obecná pravá strana – Variace konstant

1. Určíme **fundamentální systém řešení** $\varphi_1(x), \ \varphi_2(x)$
2. Určíme také $\varphi_1', \ \varphi_2'$ a **wronskián** w - determinant
$$w = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'$$
3. Wronskiány w_1, w_2
$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ f(x) & \varphi_2' \end{vmatrix} = -\varphi_2 \cdot f, \quad w_2 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1' & f(x) \end{vmatrix} = \varphi_1 \cdot f$$
4. $K_1(x) = \int \frac{w_1}{w} \, \mathrm{d}x, \quad K_2(x) = \int \frac{w_2}{w} \, \mathrm{d}x$
5. **Obecné řešení** $y_{ob} = y_H + y_P = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + K_1(x)\varphi_1 + K_2(x)\varphi_2$

Příklad

Příklad

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$$

1. Charakteristická rovnice :
   $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = e^x,\ \varphi_2 = xe^x$
2. $\varphi_1' = e^x,\ \varphi_2' = e^x(1+x),\ w = e^{2x}$
3. $w_1 = -\dfrac{xe^{2x}}{x^2+1}, \quad w_2 = \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$
4. $K_1(x) = \displaystyle\int -\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1),$
   $K_2(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x$
5. $y_{ob} = C_1 e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) \cdot e^x + x \cdot \operatorname{arctg} x \cdot e^x$

A P L I K A C E

Aplikace : kmitání

- Rovnicí
$$my'' + ky = 0$$
jsou popsány nevynucené (vlastní) kmity hmotného bodu o hmotnosti m, zavěšeného na pružině o tuhostosti k.
- Rovnicí
$$my'' + cy' + ky = 0$$
jsou popsány nevynucené tlumené kmity hmoty m zavěšené na pružině tuhosti k při vazkém tření c. $(m, k, c > 0)$
- Vynucené kmity
$$y'' + py' + qy = f(t), \quad p, q \in \mathbb{R}$$
Kmity vynucuje $f(x)$ (pravá strana).
- Elektrický obvod se sériově zapojenou cívkou indukčnosti L, kondenzátorem kapacity C, rezistorem odporu R a zdrojem napětí $E(t)$. Hodnota elektrického náboje v čase t - $q(t)$.
$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t)$$

Kmitání (Čipera: Kapitola 2, příklad 2.3)

Rovnicí

$$my'' + ky = 0$$

jsou popsány nevynucené (vlastní) kmity hmotného bodu o hmotnosti m, zavěšeného na pružině o tuhosti k.

Kořeny charakteristické rovnice $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$,
tvar vlastních kmitů je dán obecným řešením

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

Jsou-li C_1, C_2 obě nenulové, můžeme upravit na tvar

$$y = A \sin(\omega x + \alpha),$$

kde $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},\ \alpha = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}$.
Tedy amplituda nevynucených kmitů je A, jejich frekvence ω.
$C_1 = A \sin \alpha, C_2 = A \cos \alpha, \beta = \omega x$,
$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

Matematické kyvadlo

Hmotný bod hmotnosti m je zavěšen na tenkém vlákně délky L zanedbatelné hmotnosti. Vychýlíme o úhel θ (do polohy y_0) a pustíme (počáteční rychlost je nulová). Zanedbáme odpor vzduchu při pohybu kyvadla i tření v závěsu. Gravitační pole považujeme za homogenní. Výchylka v závislosti na čase: $y(t)$

Pohybová rovnice: $F = -mg \sin\theta$

Aproximace: $\sin\theta \approx \theta = \frac{y}{L}$

Diferenciální rovnice:

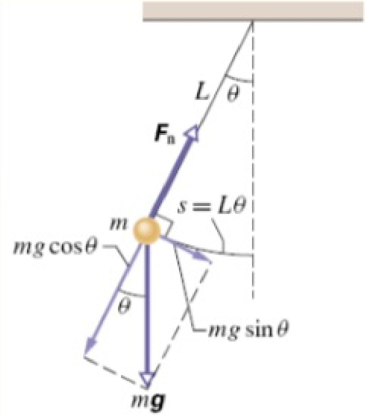
$$m \underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{a} = -mg\frac{y}{L} \Rightarrow y'' + \frac{g}{L}y = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow$$

$$y = C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{K}} + C_2 \sin\sqrt{\frac{g}{K}}.$$

Počáteční podmínky:

$$\underbrace{y(0)}_{\text{poloha}} = y_0, \ \underbrace{y'(0)}_{\text{rychlost}} = 0.$$



Tlumené kmity (Čipera: Kapitola 2, příklad 2.5)

Rovnicí

$$my'' + cy' + ky = 0$$

jsou popsány nevynucené tlumené kmity hmoty m zavěšené na pružině tuhosti k při vazkém tření c. $(m, k, c > 0)$
Tvar vlastních kmitů je dám obecným řešením

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x),$$

kde $\alpha = -\frac{1}{2}\frac{c}{m},\ \omega = \sqrt{\dfrac{4km - c^2}{4m^2}},\ 4km - c^2 > 0$
Řešení opět lze upravit na tvar

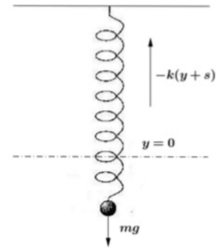
$$y = Ae^{\alpha x} \sin(\omega x + \varphi)$$

Tlumené kmity hmoty m jsou popsány funkcí obecného řešení, amplituda $F = Ae^{\alpha x}$ klesá exponenciálně s časem x $(\alpha < 0)$, frekvence je ω počáteční fáze $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{C_1}{C_2}$

Závaží na pružině

Pružina délky ℓ visí svisle (nebo je uchycena zdola a stojí svisle). Zavěsíme-li na pružinu kuličku hmotnosti m, pružina se protáhne o délku s. Posadíme-li na pružinu těleso hmotnosti m pružina se stlačí o délku s.

Na pružinu působí síla velikosti ks (Hookův zákon, síla je přímo úměrná prodloužení s, konstanta úměrnosti k charakteristika pružiny - pružinová konstanta). Je-li zavěšená kulička v klidu, jsou síly v rovnováze a platí $mg = ks$.



Vychýlíme-li kuličku svisle o y a následně uvolníme, bude kulička konat kmitavý pohyb, popsaný funkcí $y(t)$:

$$\text{Newton: } \underbrace{ma}_{F_{kul}} = \underbrace{-k(y+s)+mg}_{F_{pruz}} \Rightarrow m\underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{a} = -ky \underbrace{-ks+mg}_{0 \text{ rovnováha}} \Rightarrow my'' = -ky$$

$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow y = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}} + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}$. Frekvence kmitů je $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Jedná-li se například o houpačku, kdo se houpe rychleji: těžší nebo lehčí člověk?

S rostoucí hmotností m frekvence klesá, těžší se houpe pomaleji.

Vynucené kmity (Čipera: Kapitola 2, příklad 2.11)

$$y'' + py' + qy = f(t), \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Kmity vynucuje $f(x)$ (pravá strana).
Pokud
frekvence vynucených kmitů je stejná jako frekvence nevynucených kmitů,
dochází k rezonanci.

a) $y'' + 9y = 2\cos 2x$ **b**) $y'' + 9y = 2\cos 3x$

$$y_H = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x, \quad \text{frekvence vlastních kmitů } \omega_v = 3$$

Frekvence vynucených kmitů
a) $\omega_f = 2$: nedochází k rezonanci **b**) $\omega_f = 3$: dochází k rezonanci

Tvar vynucených kmitů určíme odhadem partikulárního řešení:
a) $y_P = A\cos 2x + B\sin 2x$ **b**) $y_P = (A\cos 3x + B\sin 3x) \cdot \mathbf{x}$

Závaží na pružině (s působící silou)

Závaží hmotnosti m je zavěšeno na pružině tuhosti k. Proti pohybu závaží působí odpor prostředí popsaný konstantou r. Navíc na závaží působí síla, která závisí na čase t a je popsaná funkcí $F(t)$.
Například:
závaží hmotnosti 1 $[kg]$, na pružině tuhosti 50 $[kg\ s^{-2}]$ v prostředí s odporem vzduchu 2 $[kg\ s^{-1}]$. Na závaží působí tíha -5 $[kg\ m\ s^{-2}]$.
Závaží je vychýleno z rovnovážné polohy do bodu 0.2 $[m]$,
rychlost závaží v čase $t = 0$ je nulová.
Polohu závaží v čase $y(t)$ lze popsat rovnicí s počátečními podmínkami:
$y'' + 2y' + 50y = -5, \quad y(0) = 0.2, \quad y'(0) = 0$
Řešení:
$y_H = e^{-t}\left(C_1 \cos 7t + C_2 \sin 7t\right), \quad y_P = A$
$y_{ob} = e^{-t}\left(C_1 \cos 7t + C_2 \sin 7t\right) - 0.1$

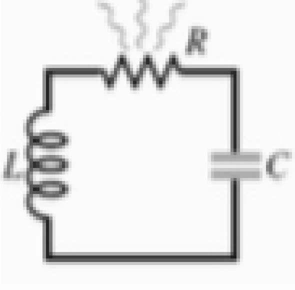
$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{3\cos(7\,t)}{10} + \frac{3\sin(7\,t)}{70}\right) - \frac{1}{10}$$

V Matlabu získáme toto řešení takto:

```
reseni = dsolve('D2y =-2*Dy-50*y-5','y(0)=0.2','Dy(0) = 0')
```

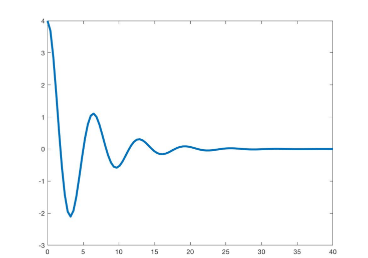
RLC obvod

Elektrický obvod se sériově zapojenou cívkou indukčnosti L, kondenzátorem kapacity C, rezistorem odporu R.
Hodnota elektrického náboje v čase t je popsaná funkcí $q(t)$.



Pro $L = 1$ [Henry], $C = 1$ [Farad]
a $R = 0.4$ [Ohm]:

$$q'' + 0.4q' + 1 = 0,\ q(0) = 4, q'(0) = 0$$



$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0,$$

$$q = Ae^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

útlum oscilací v obvodu RLC v důsledku disipace energie v rezistoru.