Cvičení 7: druhá část

Lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty

6.11.2019

Lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty

Základní tvar rovnice

$$\underbrace{y'' + py' + qy = 0}_{\text{homogenní}} \qquad \underbrace{y'' + py' + qy = f(x)}_{\text{nehomogenní}} \qquad \boxed{p, q \in \mathbb{R}}$$

Homogenní rovnice

- má **triviální** řešení $y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$
- Cauchyova úloha: $y'' + py' + qy = 0,\ y(x_0) = a, y'(x_0) = b$
  má **jediné maximální řešení** pro libovolnou volbu x_0, a, b.
  Toto řešení je definováno pro $x \in \mathbb{R}$.
- **Fundamentální systém řešení**
  Jestliže dvě funkce φ_1 a φ_2 jsou dvě řešení homogenní rovnice v intervalu $(-\infty,\ \infty)$ a jsou lineárně nezávislé v intervalu $(-\infty,\ \infty)$, pak jejich **lineární kombinace**
  $$y(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$
  je **obecným řešením** homogenní rovnice.
  Říkáme, že funkce $\varphi_1,\ \varphi_2$ tvoří **fundamentální systém řešení**.
- Známe-li fundamentální systém řešení homogenní rovnice, pak pro zadané počáteční podmínky x_0, a, b určíme maximální řešení Cauchyovy úlohy, dopočítáme-li konstanty C_1 a C_2.

Určení fundamentálního systému řešení homogenní rovnice

Řešení diferenciální rovnice $\boxed{y'' + py' + qy = 0}$ hledáme ve tvaru $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$ určíme z **charakteristické rovnice**

$$\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}$$

kořeny charakteristické rovnice		fundamentální systém řešení
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\varphi_1 = e^{\lambda_1 x}$, $\varphi_2 = e^{\lambda_2 x}$
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\varphi_1 = e^{\lambda_1 x}$, $\varphi_2 = x e^{\lambda_1 x}$
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ $Re(\lambda) = \alpha \neq 0$	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$	$\varphi_1 = e^{\alpha x} \cos \omega x$, $\varphi_2 = e^{\alpha x} \sin \omega x$
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ $Re(\lambda) = \alpha = 0$	$\lambda_{1,2} = \pm i\omega$	$\varphi_1 = \cos \omega x$, $\varphi_2 = \sin \omega x$

Obecné řešení homogenní rovnice:

$$y_H = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$$

Příklady (Čipera, 2.3 Úlohy, př. 7-12)

Pro homogenní rovnice určíme :

1. charakteristickou rovnici,
2. kořeny charakteristické rovnice,
3. fundamentální systém řešení homogenní rovnice
4. a obecné řešení homogenní rovnice.

	homogenní rovnice	charakteristická rovnice	kořeny	f.s.ř, y_H
1.	$y'' - 4y' + 3y = 0$	$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$	$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$	$\varphi_1 = e^x$, $\varphi_2 = e^{3x}$ $y_H = \dots$
2.	$y'' + 2y' + y = 0$	$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$	$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$	
3.	$y'' + 4y' = 0$			
4.	$y'' + 4y = 0$			
5.	$y'' - 2y' + 2y = 0$			
6.	$y'' - 2y' + 3y = 0$			
7.	$y'' - 4y' + 13y = 0$			

Příklady (Čipera, 2.3 Úlohy, př. 1-6)

Sestavte homogenní **diferenciální rovnici** druhého řádu s konstantními koeficienty,
je-li **dán její fundamentální systém řešení** v intervalu $(-\infty,\ \infty)$.

1. $\varphi_1 = e^{-x},\ \varphi_2 = e^{2x}$

   f.s.ř. $\Rightarrow$ kořeny : $e^{-x} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad e^{2x} \Rightarrow \lambda_2 = 2$

   kořeny $\Rightarrow$ kvadratická r. : $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$

   charakteristická rovnice: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

   diferenciální rovnice: $y'' - y' - 2y = 0$

2. $\varphi_1 = 1,\ \varphi_2 = e^{x}$
3. $\varphi_1 = e^{-3x},\ \varphi_2 = xe^{-3x}$
4. $\varphi_1 = 1,\ \varphi_2 = x$
5. $\varphi_1 = \sin 2x,\ \varphi_2 = \cos 2x$
6. $\varphi_1 = e^{-2x}\cos(3x),\ \varphi_2 = e^{-2x}\sin(3x)$