Cvičení 5

ODR

23.10.2019

Diferenciální rovnice: pojmy

Rovnice, které obsahují neznámou funkci a její derivace.

Obyčejné diferenciální rovnice obsahují neznámou funkci jedné nezávislé proměnné a její derivace.

Parciální diferenciální rovnice

Řád diferenciální rovnice
určuje nejvyšší derivace neznámé funkce.

Řešení diferenciální rovnice
je **funkce**, která vyhovuje diferenciální rovnici
(na zadané množině).
Řešení : obecné, partikulární, (výjimečné)

Graf konkrétního řešení se nazývá **integrální křivka**.

Existence řešení

Cauchyova (počáteční) úloha
Diferenciální rovnice $+$ počáteční podmínka.
(Hledáme partikulární řešení, procházející zadaným bodem)

Diferenciální rovnice: typy

- 1. řádu
  - separovatelné $$y' = p(x) \cdot q(y)$$
  - exaktní $$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad \text{při } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
  - lineární $$y' = a(x)y + b(x)$$
  - Bernoulliova $$y' = a(x)y + b(x)y^p$$
- 2. řádu
  - s konstantními koeficienty $$y'' + ay' + by = f(x), \; a, b \in \mathbb{R}$$
  - s proměnnými koeficienty $$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \; a, b \in \mathcal{C}(J)$$
- soustavy rovnic 1. řádu
- rovnice vyššího řádu a jejich převod na soustavu

Diferenciální rovnice 1. řádu

Rovnice v normálním tvaru:

$$\frac{dy}{dx} \left(= y'\right) \; = \; f(x, y), \quad [x, y] \in G$$

Rovnice v diferenciálech

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad [x, y] \in G$$

Funkce f, P, Q musí být (alespoň) spojité v **oblasti** $G \subseteq \mathbb{R}^2$

Oblast je otevřená souvislá množina.

Separovatelné diferenciální rovnice, Cauchyova úloha

$$y' = P(x) \cdot Q(y), \quad \text{počáteční podmínka: } y(x_0) = y_0$$

Existence řešení : $P(x) \cdot Q(y)$ musí být spojitá v oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^2$
Existence jediného řešení Cauchyovy úlohy (postačující podmínky):
v oblasti $G \subseteq \mathbb{R}^2$ (ve které leží bod $[x_0, y_0]$)

- $P(x) \cdot Q(y)$ musí být spojitá
- musí mít spojitou parciální derivaci $\dfrac{\partial(P(x) \cdot Q(y))}{\partial y}$

Řešení : funkce $y(x)$ definovaná na intervalu J, pokud platí:

- Interval není tvořen jediným bodem,
- $y(x)$ má spojitou derivaci na J, tj $y \in \mathcal{C}^1(J)$
- $\forall x \in J : [x, y(x)] \in G$
- $\forall x \in J : y'(x) = f(x, y(x))$

Prodloužení řešení, maximální řešení.

• Pro řešení Cauchyovy úlohy navíc platí $y(x_0) = y_0$.

Postup řešení:

1. $\dfrac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$

2. Separujeme proměnné: $R(y)dy = P(x)dx$

3. Integrujeme levou a pravou stranu rovnice
   $L = \int R(y)dy \qquad P = \int P(x)dx$

4. Vyjádříme $y(x) = \cdots + C$,
   případně zapíšeme řešení jako množinu funkcí, zadaných rovnicemi $F(x, y) = C$

5. Řešení Cauchyovy úlohy: z počáteční podmínky určíme konstantu C, kterou dosadíme do obecného řešení;
   tím získáme řešení vyhovující zadané podmínce.

Příklady: Čipera 1.6 Úlohy

Příklad 8 $y' = \dfrac{1-x}{1-y}, \quad y(1) = 0$

Příklad 11 $y' = y^2 \sin 2x, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 4$

Příklad 15 $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y+1}, \quad y(0) = -2$

Příklad 16 $y' = e^y \cos 2x, \quad y(0) = \ln 2$

Příklad 22 $\dfrac{y'}{x} - y^2 \ln x = 0, \quad \text{a)} y(1) = 0, \quad \text{b)} y(1) = 4$

Příklad 36 $xy' = y \ln y, \quad \text{a)} y(1) = 1, \quad \text{b)} y(1) = e$

Příklad 38 $x^2 y' = (x-1)y, \quad y(2) = \sqrt{e}$

Chladnutí kávy

V kuchyni je teplota $T_0 = 20^\circ$. Za jak dlouho se právě zalitá vroucí káva ochladí na teplotu $T_2 = 50^\circ$?

Rychlost ochlazování tělesa na vzduchu (tj. změna teploty v čase) je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a vzduchu.

Označíme:

čas: t, teplotu v čase t: $T(t)$,

rychlost ochlazování v čase : $\dfrac{dT}{dt}$, konstantu úměrnosti k.

Experimentálně zjištěná konstanta $k = 0.04$

Proces změny teploty v čase popisuje obyčejná diferenciální rovnice:

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_0), \quad T(0) = 100, \quad T(?) = 50 \quad k = 0.04$$

Řešení rovnice lze určit separací proměnných.

Řešením je funkce $T(t)$, která popisuje proces změny teploty v čase.

$$T(t) = T_0 + Ce^{-kt}, \quad C = T(0) - T_0 = 80, \quad T(24,5) = 50$$