Cvičení 3

Taylorovy řady, Fourierovy řady

9.10.2019

Obsah

Algebraické operace s mocninnými řadami

Součet a součin dvou mocninných řad a součin řady s reálným číslem jsou definovány stejně jako pro číselné řady.

Výsledné řady jsou opět mocninné řady.

Nechť řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ konvergují k $s_1(x)$ a $s_2(x)$ na intervalech (x_0-R_1, x_0+R_1) a (x_0-R_2, x_0+R_2).
Označme $R=\min\{R_1, R_2\}$.

Součet dvou řad je definován jako $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)(x-x_0)^k$.

Tato řada konverguje k $s_1(x)+s_2(x)$ na intervalu (x_0-R, x_0+R).

Součin dvou řad je definován jako
$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$, $c_k=\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-1}$.
Tato řada konverguje k $s_1(x)\cdot s_2(x)$ na intervalu (x_0-R, x_0+R).

Derivování mocninných řad

Nechť na $I = (x_0 - R,\ x_0 + R)$ platí : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k = s(x)$ a
$s(x)$ je diferencovatelná funkce.

$$\text{Potom} \quad s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x - x_0)^{k-1}, \quad x \in I$$

Derivování člen po členu. Mocninné řady pro derivace se získají (v intervalu konvergence) derivováním člen po členu.
V krajních bodech musíme konvergenci ověřit dosazením.

Příklad

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1,1) \text{ (geom. ř.)},$$

po derivaci:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad x \in (-1,1),$$

není geometrická řada, ale umíme určit součet $\forall x \in (-1,1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{x}{(1-x)^2} \quad x \in (-1,1)$$

Integrování mocninných řad

Nechť na $I = (-R,\ R)$ platí : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = s(x)$ (spojitá funkce)

$$\int_{x_0}^{x} s(t)dt = \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad x \in I.$$

Integrování člen po členu. Mocninná řada pro integrál součtu se získá (na intervalu konvergence) integrováním člen po členu.

Příklad (geometrická řada s kvocientem $-t$)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots = \frac{1}{1+t}, \quad t \in (-1,1),$$

integrování člen po členu:

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^k dt \underbrace{=}_{meze} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$\int_0^x \frac{1}{t+1}\, dt = \ln(t+1)\big|_0^x = \ln(x+1)$$

Příklady

Příklad. Určete součet řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \underbrace{=}_{|x|<1} \frac{1}{1-x}$, geom. řada, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\, dx = [-\ln(1-x)]_0^{\frac{1}{2}} = \ln 2$, tj. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} = \ln 2$

Příklad. Určete součet řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

- $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, $\displaystyle x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$
- pro $x = \frac{1}{2}$: $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$

Taylorova řada

Taylorova věta z diferenciálního počtu: Nechť f je funkce, která má derivace až do řádu n v uzavřeném intervalu I, jehož krajní body jsou čísla x a x_0. Pak platí

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

kde $R_{n+1}(x)$ je Taylorův zbytek, pro který platí

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \text{ kde } \ \xi \in I, \xi \neq x, x_0$$

Definice:

Nechť funkce má v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce** f v bodě x_0 .

Taylorovy rozvoje elementárních funkcí ($x_0 = 0$)

Koeficienty $c_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ počítáme **přímým výpočtem**.

1. $$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$$
2. $$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$$
3. $$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$$

Použití známých rozvojů

1. e^{2x}
2. $\cos 2x$
3. e^{-x^2}
4. $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$ (Euler)

Příklady

Použití vzorce pro součet geometrické řady

1. $\dfrac{1}{4-2x}$
2. $\dfrac{1}{3+2x}$
3. $\dfrac{1}{1+x^2}$

Příklady ($x_0 = 0$)

$x_0 = 0$; Rozvineme do řady a určíme interval konvergence.

1. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\quad$ $\left(\text{integrací } \dfrac{1}{1+t^2}\right)$
2. $f(x) = \ln(1+x)$ $\quad$ $\left(\text{integrací } \dfrac{1}{1+t}\right)$
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $\quad$ $\ln(1+x) - \ln(1-x)$
4. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\quad$ $\left(\text{derivací } \dfrac{1}{1-x}\right)$
5. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ $\quad$ geom.řada
6. $f(x) = \sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

Příklady ($x_0 = 0$), využití násobení řad

- $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ $\quad \mathrm{tg}(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \cos(x)\mathrm{tg}(x) = \sin x$

Koeficienty řady určíme porovnáním koeficientů levé a pravé strany rovnosti řad.

$\mathrm{tg}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$
\begin{aligned}
\cos(x) \cdot \mathrm{tg}(x) &= \left(1 - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4!} + \dots\right)\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots\right) \\
&= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots \\
&\qquad\qquad - \frac{c_0}{2} x^2 - \frac{c_1}{2} x^3 - \dots \\
&\quad \dots \\
\sin(x) &= \qquad x \qquad - \frac{x^3}{3!} + \dots
\end{aligned}
$$

Soustava rovnic:

$$
\begin{aligned}
x^0 :&\quad c_0 &&= 0 \\
x :&\quad c_1 &&= 1 \\
x^2 :&\quad c_2 - \tfrac{c_0}{2} &&= 0 \\
x^3 :&\quad c_3 - \tfrac{c_1}{2} &&= \tfrac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Aplikace

- přibližný výpočet (funkčních) hodnot
  - $e \doteq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{n!}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{e} \doteq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^n n!}$
  - $\pi = 4\mathrm{arctg}(1)$
- výpočet určitých integrálů
  - $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$ $\qquad\qquad$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$
  - $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$
  - $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{arctg} x}{x}\, dx$
  - $\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}\, dx$
- výpočet limit např. $\lim_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$
- **přibližné řešení diferenciálních rovnic** 13. nebo 20.11.

Fourierovy řady

Aproximace periodické funkce trigonometrickým polynomem.

Připomenutí

$$\int \cos\frac{k\pi x}{L}\, dx = \frac{L}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi x}{L} + C$$

$$\int \sin\frac{k\pi x}{L}\, dx = -\frac{L}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{L} + C$$

$$\int x\cos\frac{k\pi x}{L}\, dx = \left|\begin{array}{cc} u = x & dv = \cos\frac{k\pi x}{L}\, dx \\ du = dx & v = \frac{L}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{L} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{L}{k\pi}x\sin\frac{k\pi x}{L} - \int \frac{L}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{L}dx = \frac{L}{k\pi}x\sin\frac{k\pi x}{L} + \frac{L^2}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{L}$$

$$\sin k\pi = 0; \quad \cos k\pi = (-1)^k$$

liché číslo : $(2k-1), k \in N,$ sudé číslo: $2k$

$$\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k; \quad \cos(2k-1)\frac{\pi}{2} = 0$$

Fourierova řada periodické funkce $f(x)$

Periodická $f(x)$ s periodou $\mathbf{p = 2L}$ je zadaná na intervalu $\langle -L,\ L\rangle$

$$\mathbf{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \sin\frac{k\pi x}{L}}, \quad \text{kde}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}, \quad b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}$$

V případě, že:

- $f(x)$ je lichá funkce, $a_k = 0, k = 0, 1, \ldots$
- $f(x)$ je sudá funkce, $b_k = 0$