Cvičení 2

Matematika 3

2.10.2019

Obsah

Číselné řady: pokračování

Číselné řady s kladnými členy
d'Alembertovo kritérium

Alternující řady
Leibnitzovo kritérium
absolutní a relativní konvergence

Limitní d'Alembertovo kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.
Existuje-li

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,\ 0 \leq q \leq \infty,$$

potom v případě, že

$q < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje

$q > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

$q = 1$ o konvergenci řady nelze tímto kritériem rozhodnout

Příklady (d'Alembertovo kritérium)

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2\cdot 2^n} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

řada konverguje

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{2^n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)+1}{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{2^{\frac{n}{2}}}{3n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{3n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

řada konverguje

- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3n+1)3^n}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n\cdot 2^n}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \frac{n!}{n^n}$$

Absolutní a neabsolutní konvergence

Definice. Řekneme, že

řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **neabsolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, tj.

řada **konverguje relativně** když řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje,

ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.

Alternující řada a Leibnitzovo kritérium

Leibnitz:
Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí:
$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n,\ \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0.$

Potom řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ je konvergentní.

Odhad chyby:

Pro alternující řadu platí: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \leq a_{n+1}$

Příklady (alternující řady)

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$ Leibnitzova řada

  řada z absolutních hodnot: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: diverguje

  posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je nerostoucí, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

  řada konverguje relativně

  $$s_4 = \frac{-1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{5}{12}, \quad |R_4| \leq \frac{1}{5}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(n+1)!}$$

  řada konverguje absolutně

  $$s_3 = -\frac{1}{2} + \frac{4}{6} - \frac{8}{24} = -\frac{1}{6} \quad |R_3| \leq \frac{2^4}{5!}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}}$$

  diverguje

Shrnutí

Vztah absolutni konvergence a konvergence:

$a_n \geq 0$: AK $\Leftrightarrow$ K $\qquad$ $a_n \in \mathbb{R}$: AK $\Rightarrow$ K

Aritmetické operace s řadami:

operace	**stačí, když**
násobek konstantou	řada konverguje
asociativita (uzávorkování)	řada konverguje
součet, rozdíl	obě řady konvergují
přerovnání (komutativita)	řada konverguje absolutně
násobení dvou řad	obě řady konvergují, alespoň jedna z nich KA

Geometrická řada

součet geometrické řady $\qquad \dfrac{a}{1-q} = a\sum_{k=0}^{\infty} q^k, \ |q| < 1$

Leibnitzova řada $\qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \leq a_{n+1}$

Dirichletova řada $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^a}$ konverguje pro $a > 1$

Řady funkcí

$$\text{Řady funkcí :} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

$$\text{Mocninné řady:} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

$$\text{Taylorovy řady:} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Mocninné a Taylorovy řady

- Místo číselných posloupností uvažujeme posloupnost funkcí. Nechť $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ je posloupnost funkcí, definovaných na množině $E \subseteq \mathbb{R}$.

  $$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{nazýváme řadou funkcí.}$$

  Obor konvergence řady funkcí je množina $\mathcal{O} : x \in E \subseteq \mathbb{R}$, pro něž je řada funkcí konvergentní, tj. existuje vlastní limita posloupnosti částečných součtů. Tuto limitu, nazývanou **součtem řady** značíme $s(x)$, $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$, $x \in \mathcal{O}$.

- Speciální případ řad funkcí: **mocninné řady**. Posloupnost funkcí $f_k(x) = c_k(x - x_0)^k$, $(x_0, c_k \in \mathbb{R})$ Speciální mocninná řada: **Taylorova řada funkce**,

  $$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Struktura oboru konvergence mocninné řady

Mocninná řada:

$$\sum_{k=0\infty} c_k(x-x_0)^k, \quad x_0 \text{ je střed konvergence}$$

Pro každou mocninnou řadu nastává právě jedna ze tří možností:

1. řada konverguje **pouze** pro $x = x_0$;
2. řada konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$;
3. existuje kladné číslo R takové, že řada konverguje absolutně pro $|x - x_0| < R$ a diverguje pro $|x - x_0| > R$

Číslo R je **poloměr konvergence** mocninné řady;

Interval $I = (x_0 - R, x_0 + R)$

je **interval konvergence** mocninné řady.
(dodefinujeme $R = 0$ pro 1. a $R = \infty$ pro 2. případ)

Určení intervalu konvergence: d´Alembertovo kritérium

1. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$, $x_0 = 0, R = 1$
2. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $x_0 = 0, R = 1$
3. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, $x_0 = 0, R = \infty$
4. $\sum_{k=0}^{\infty}k!\cdot x^k$, $x_0 = 0, R = 0$
5. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-4)^{3k}}{8^k(k+1)}$, $x_0 = 4, R = 2$
6. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{(x+2)^{2k}}{4^k(2k+1)}$, $x_0 = -2, R = 2$

Chování řady v krajních bodech intervalu konvergence

Dosazením $x = x_0 \pm R$ do mocninné řady dostaneme (2) číselné řady.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k},$ $\qquad x_0 = 0, R = 1$
   1. $x = -1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{k}$ $\qquad$ diverguje
   2. $x = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ $\qquad$ konverguje relativně
2.
3.
4.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-4)^{3k}}{8^k(k+1)},$ $\qquad x_0 = 4, R = 2$
   1. $x = 2$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2-4)^{3k}}{8^k(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)}$ $\qquad$ konverguje relativně
   2. $x = 6$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)}$ $\qquad$ diverguje

Konvergence mocninné řady: "vzorové řešení"

Příklad. Určete interval I konvergence mocninné řady $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{(x+2)^{2k}}{4^k(2k+1)}$.

Uveďte střed konvergence x_0 a poloměr konvergence R.

Pomocí d'Alembertova kritéria určíme interval absolutní konvergence:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(x+2)^2}{4}\underbrace{\frac{2k+1}{2k+3}}_{\to 1} = \frac{(x+2)^2}{4}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 2 \Rightarrow x_0 = -2,\ R = 2,\ I = (-4,\ 0)$$

Vyšetřete konvergenci dané řady v krajních bodech intervalu I.

$$x_1 = -4\text{: } \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(-4+2)^{2k}}{4^k(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(-2)^{2k}}{4^k(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{4^k}{4^k(2k+1)}$$

$$x_1 = 0\text{: } \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2)^{2k}}{4^k(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{4^k}{4^k(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

jsou to stejné číselné řady (kdyby byly různé, tak pro každou zvlášť)

absolutní konvergence : NE (srovnání s harmonickou řadou, která diverguje)

relativní konvergence: ANO (Leibnitzovo krit.: $\dfrac{1}{2k+1}$ je klesající, $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{2k+1} = 0$).

Zapište intervaly, v nichž řada konvegruje absolutně a intervaly, v nichž diverguje.

Uveďte případné body x, v nichž řada konverguje relativně.

$AK : x \in (-4, 0)$, $\quad D : x \in (-\infty, -4),\ x \in (0, \infty)$, $\quad KR : x = -4, x = 0$

Znázorněte na číselné ose.