Cvičení 12

Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu

11.12.2019

Soustava (dvou) neautonomních rovnic

zápis po složkách

$$\dot{x} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + b_1(t)$$
$$\dot{y} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + b_2(t)$$

maticový zápis

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)$$

$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A(t) \in \mathcal{C}(\mathcal{J})$ $B(t) \in \mathcal{C}(\mathcal{J})$ koeficienty jsou spojité na $\mathcal{J}$,

Homogenní: $B = (0,0)^T$ nehomogenní: $B \neq (0,0)^T$

Existence a jednoznačnost řešení

Podmínkou je spojitost $A(t)$, $B(t)$ v intervalu $\mathcal{J}$.
Soustava má **triviální** nulové řešení $\Phi(t) = \vec{0}$ definované na $\mathcal{J}$.

Fundamentální systém řešení

Dvě (pro soustavu 2 rovnic) **lineárně nezávislá** řešení $\Phi_1(t), \Phi_2(t)$ resp. n (pro soustavu n rovnic) **lineárně nezávislých** řešení $\Phi_1(t), \dots \Phi_n(t)$.
Každé řešení soustavy rovnic lze zapsat jako lineární kombinaci funkcí $\Phi_1(t), \Phi_2(t)$, $\Phi(t) = C_1\Phi_1(t) + C_2\Phi_2(t)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Wronskián. Funkce $\Phi_1(t), \Phi_2(t)$ tvoří fundamentální systém řešení soustavy rovnic v intervalu $\mathcal{J}$ právě tehdy, když wronskián, tj. determinant matice sestavené ze sloupcových vektorů, je **nenulový**.

Příklad

Je dána lineární homogenní soustava

zápis po složkách	maticový zápis
$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{t}{1-t}x + \frac{1}{1-t}y \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$	$\dot{X} = \begin{pmatrix} -\frac{t}{1-t} & +\frac{1}{1-t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$

1. **Určete interval(y) existence jediného řešení.** Koeficienty matice jsou spojité pro $t \neq 0$, tj. $\mathcal{J}_1 = (-\infty, 1)$, $\mathcal{J}_2 = (1, \infty)$.
2. Ukažte, že **vektorové funkce** $\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $\Phi_2 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ **tvoří fundamentální systém řešení** zadané soustavy.
   - Ověření, že $\Phi_1(t)$ a $\Phi_2(t)$ **vyhovují zadané soustavě**.
     $\dot{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{t}{1-t} & +\frac{1}{1-t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
     $\dot{\Phi}_2 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{t}{1-t} & +\frac{1}{1-t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Phi_2 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$
   - Ověření, že **jsou lineárně nezávislé**, tj. wronskián $w(t) \neq 0$.

$$w(t) = \begin{vmatrix} 1 & e^t \\ t & e^t \end{vmatrix} = e^t - te^t = e^t(1-t) \neq 0 \text{ pro } t \in \mathcal{J}_1, t \in \mathcal{J}_2.$$

3. **Zapište obecné řešení** soustavy rovnic.
$X_{OB} = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2$
$X_{OB} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \ t \in \mathcal{J}_i, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

4. **Určete maximální řešení, které vyhovuje počáteční podmínce** $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Určíme konstanty:
$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = -2, C_2 = 1$
Výsledek: $X_{max} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \ t \in \mathcal{J}_1$
zapsáno po složkách $x(t) = -2 + e^t, \ y(t) = -2t + e^t$