

Interpolace a aproximace

Interpolace algebraickým polynomem a
aproximace metodou nejmenších čtverců

Interpolace algebraickým polynomem

Úloha. Dána tabulka hodnot x_i, y_i ,
 $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$. Hodnoty jsou „přesné“.

Hledáme polynom nejvýše n -tého
stupně, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$
(tj. koeficienty $a_0 \dots a_n$), **který prochází**
všemi zadanými body, tj. $p(x_i) = y_i$.

Rovnice pro určení koeficientů
hledaného polynomu sestavujeme z
podmínky $p(x_i) = y_i$.

Stupeň hledaného polynomu je určen
počtem zadaných bodů.

Aproximace metodou nejmenších čtverců

Úloha. Dána tabulka hodnot x_i, y_i , kde
 x_i **může být** $= x_j$ pro $i \neq j$. Hodnoty jsou zatíženy
chybou, např. experimentálně naměřené .

Hledáme takový polynom nejvýše n -tého
stupně, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$
(tj. koeficienty $a_0 \dots a_n$), aby **součet druhých**
mocnin odchylek $p(x_i)$ od y_i byl minimální.

Rovnice pro určení koeficientů hledaného
polynomu sestavujeme z podmínky minimality
kvadratické odchylky .

Stupeň hledaného polynomu je určen
předpokládanou závislostí hodnot.

Interpolace algebraickým polynomem.

Úloha. Dána tabulka hodnot $x_i, y_i, x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$.

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	...	y_n

Hledáme polynom nejvýše n -tého stupně, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

(tj. koeficienty $a_0 \dots a_n$), **který prochází všemi zadanými body**, tj. $p(x_i) = y_i$.

Rovnice pro určení koeficientů hledaného polynomu sestavujeme z podmínky $p(x_i) = y_i$.

bod $[x_0, y_0]$: $a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0$

bod $[x_1, y_1]$: $a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1$

bod $[x_2, y_2]$: $a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n = y_2$

...

bod $[x_n, y_n]$: $a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{zadané x-ové hodnoty}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\text{neznámé}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\text{zadané}}$$

Jsou li všechny x-ové hodnoty navzájem různé, je matice soustavy regulární, tedy existuje jediné řešení $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, tj. právě jeden polynom $p(x)$.

Stupeň hledaného polynomu je určen počtem bodů.

Interpolace algebraickým polynomem - příklad

Dána tabulka hodnot :

x	-2	-1	0	1
y	30	11	4	9

- Sestavte soustavu lineárních rovnic pro určení interpolačního polynomu.
- Určete interpolační polynom.
- Vypočítejte interpolovanou hodnotu v bodě $x=0.5$.
- Výsledky zobrazte.

a) Hledáme polynom nejvýše 3. stupně: $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ tj. neznámé koeficienty a_0, a_1, a_2, a_3 . Soustavu rovnic získáme dosazením zadaného bodu do $p(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{bod } [-2, 30]: p(-2) = a_0 + a_1(-2) + a_2(-2)^2 + a_3(-2)^3 = 30 \\ \text{bod } [-1, 11]: p(-1) = a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 = 11 \\ \text{bod } [0, 4]: p(0) = a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + a_3(0)^3 = 4 \\ \text{bod } [1, 9]: p(1) = a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 + a_3(1)^3 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 11 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

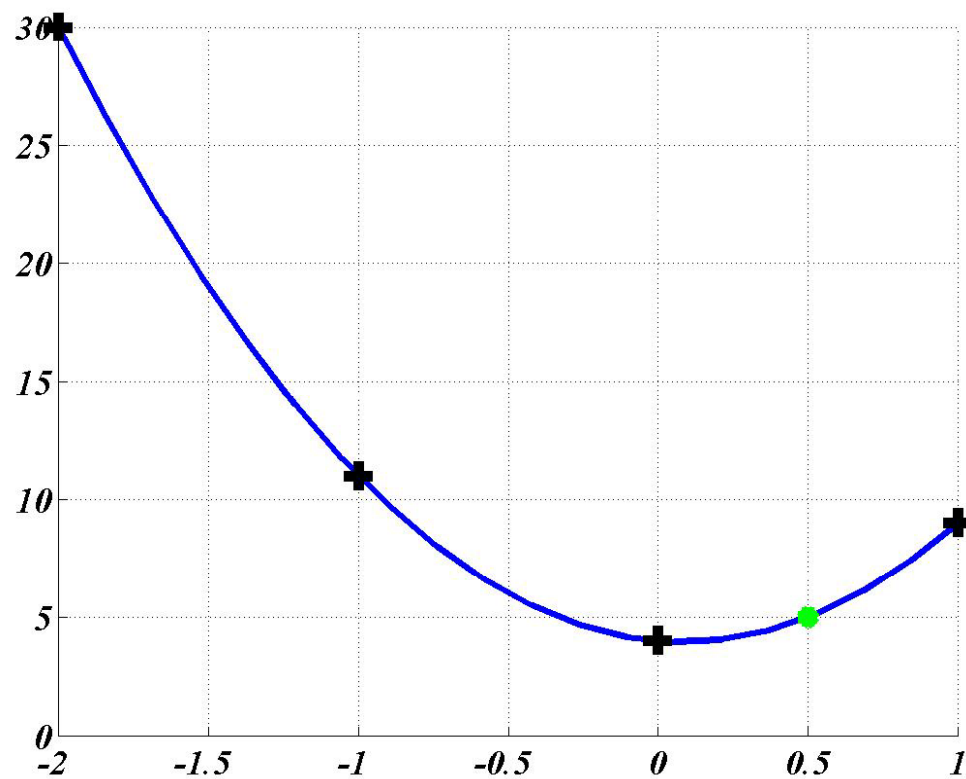
b) Vyřešíme soustavu: $a_0=4, a_1=-1, a_2=6, a_3=0$,

tím jsme určili polynom 2. stupně: $p(x)=4 - x + 6x^2$

c) Interpolovaná hodnota v bodě $x = 0.5$ je $p(0.5) = 4 - 0.5 + 6(0.25) = 5$

Interpolace algebraickým polynomem - příklad

d) Zobrazení výsledků:



Interpolace polynomem - ověření v MATLABu

```
xi = [-2 -1 0 1]; % zadané xi
yi = [30 11 4 9]; % zadané yi
x=0.5; % zadaný bod x
n=size(xi); % n(1) : počet řádků, n(2): počet sloupců xi
A=[ones(n)' cumprod(xi'*ones(1,n(2)-1),2] % matice soustavy
      %%nebo "ručně", neefektivně: A=[ones(n,1) xi' (xi').^2 (xi').^3]
ai = A\yi % řešení soustavy, koeficienty ai
p = fliplr(ai') % „otočení“ ai,
y = polyval(p, x) % výpočet hodnoty pro x = 0.5
%%%%%%%%%%%%% zobrazení výsledků %%%%%%%%%%%%%%
xx = linspace(xi(1), xi(n(2)), 20) % rozdělíme interval <-2,1> na 20 bodů
yy = polyval(p, xx) % vypočteme yy = p(xx)
plot(xx,yy,xi,yi, 'ks', x, y, 'g*') % zobraz
```

Aproximace metodou nejmenších čtverců

Úloha. Dána tabulka hodnot x_i, y_i , kde x_i může být $= x_j$ pro $i \neq j$.

Hledáme takový polynom nejvýše n -tého stupně, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

(tj. koeficienty $a_0 \dots a_n$), aby **součet druhých mocnin odchylek** $p(x_i)$ od y_i **byl minimální**.

Rovnice pro určení koeficientů hledaného polynomu sestavujeme z podmínky

minimality druhé mocniny kvadratické odchylky : $D = \delta^2 = \sum_{i=0}^n (p(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min$.

Minimum kvadratické odchylky je v bodech, kde parciální derivace podle neznámých

$a_0 \dots a_n$ jsou nulové.

Nalezený polynom má ze všech polynomů stejného stupně nejmenší kvadratickou odchylku, tedy nejlépe ve smyslu metody nejmenších čtverců aproximuje zadaná data.

Odvození soustavy rovnic pro polynom 2. stupně $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, $x=x_0...x_n, y=y_0...y_n$:

Zapišeme druhou mocninu kvadratické odchylky: $D= \delta^2 = \sum_{i=0}^n (p(x_i) - y_i)^2$

$$D = (p(x_0)-y_0)^2 + (p(x_1)-y_1)^2 + (p(x_2)-y_2)^2 \dots + (p(x_n)-y_n)^2$$

$$\text{tj. } D = (a_0+a_1x_0+a_2x_0^2-y_0)^2 + (a_0+a_1x_1+a_2x_1^2-y_1)^2 + (a_0+a_1x_2+a_2x_2^2-y_2)^2 \dots + (a_0+a_1x_n+a_2x_n^2-y_n)^2$$

Vyjádříme parciální derivace D a položíme je = 0.

$$\frac{\partial D}{\partial a_0} = 2(a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 - y_0) + 2(a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 - y_1) + 2(a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 - y_2) + \dots + 2(a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 - y_n) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_1} = 2(a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 - y_0)x_0 + 2(a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 - y_1)x_1 + 2(a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 - y_2)x_2 + \dots + 2(a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 - y_n)x_n = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_2} = 2(a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 - y_0)x_0^2 + 2(a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 - y_1)x_1^2 + 2(a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 - y_2)x_2^2 + \dots + 2(a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 - y_n)x_n^2 = 0$$

Rovnice upravíme a soustavu rovnic zapišeme maticově.

$$(a_0 + a_0 + a_0 + \dots + a_0) + (a_1x_0 + a_1x_1 + a_1x_2 + \dots + a_1x_n) + (a_2x_0^2 + a_2x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_2x_n^2) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

$$(a_0x_0 + a_0x_1 + a_0x_2 + \dots + a_0x_n) + (a_1x_0^2 + a_1x_1^2 + a_1x_2^2 + \dots + a_1x_n^2) + (a_2x_0^3 + a_2x_1^3 + a_2x_2^3 + \dots + a_2x_n^3) = x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

$$(a_0x_0^2 + a_0x_1^2 + a_0x_2^2 + \dots + a_0x_n^2) + (a_1x_0^3 + a_1x_1^3 + a_1x_2^3 + \dots + a_1x_n^3) + (a_2x_0^4 + a_2x_1^4 + a_2x_2^4 + \dots + a_2x_n^4) = x_0^2y_0 + x_1^2y_1 + x_2^2y_2 + \dots + x_n^2y_n$$

$$\left. \begin{aligned} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 &= \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 &= \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 &= \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

Aproximace metodou nejmenších čtverců - příklad.

Dána tabulka hodnot:

x	-2	-1	-1	0	0	4
y	-7	-1.8	-2.2	1.1	0.9	-7

- Určete polynom nejvýše 2. stupně, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje data daná tabulkou hodnot.
- Vypočítejte kvadratickou odchylku.
- Výsledky zobrazte.

a) Hledáme $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$. Neznámé a_0, a_1, a_2 určíme ze soustavy rovnic:

$$\begin{pmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{pmatrix} \quad \text{kde : } n+1 = 6 \text{ (počet bodů v tabulce)}$$

$$\sum_{i=0}^5 x_i = 0, \sum_{i=0}^5 x_i^2 = 22, \sum_{i=0}^5 x_i^3 = 54, \sum_{i=0}^5 x_i^4 = 274$$

$$\sum_{i=0}^5 y_i = -16, \sum_{i=0}^5 x_i y_i = -10, \sum_{i=0}^5 x_i^2 y_i = -144$$

Tedy:
$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 22 \\ 0 & 22 & 54 \\ 22 & 54 & 274 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -10 \\ -144 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad p(x)=1+2x - x^2 .$$

Aproximace metodou nejmenších čtverců - příklad.

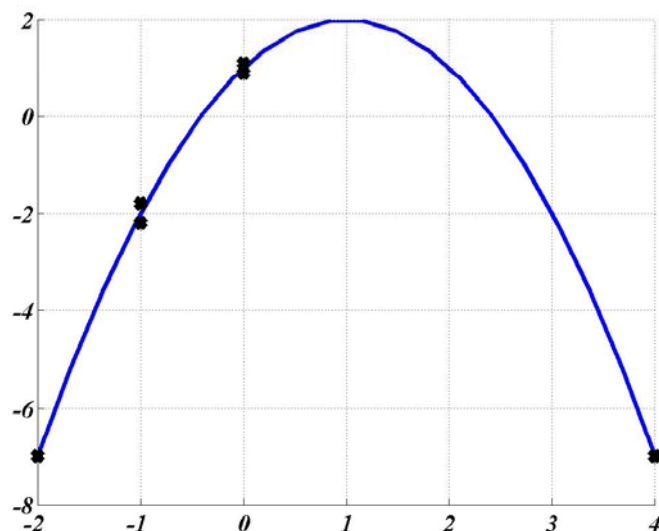
b) K zadané tabulce přidáme hodnoty nalezeného polynomu v zadaných bodech, vypočteme odchylky $p(x)-y$ a jejich druhé mocniny. Součet čísel v posledním řádku je druhá mocnina kvadratické odchylky : δ^2 . Výslednou δ získáme odmocněním.

x	-2	-1	-1	0	0	4
y	-7	-1.8	-2.2	1.1	0.9	-7
p(x)	-7	-2	-2	1	1	-7
(p(x)-y)	0	-0.2	0.2	-0.1	0.1	0
(p(x)-y) ²	0	0.04	0.04	0.01	0.01	0

$$p(x)=1+2x-x^2$$

$$\delta^2 = 0.1, \delta = 0.3162$$

c) Zobrazení



Aproximace metodou nejmenších čtverců – v MATLABu.

```
xi = [-2 -1 -1 0 0 4];  
yi = [-7 -1.8 -2.2 1.1 0.9];  
N=size(xi);  
A=[N(2)    sum(xi)    sum(xi.^2);  
   sum(xi)  sum(xi.^2) sum(xi.^3);  
   sum(xi.^2) sum(xi.^3) sum(xi.^4)]  
B=[sum(yi); sum(xi.*yi); sum((xi.^2).*yi)]  
ai = A\B;  
poly = fliplr(ai) ; P = polyval(poly, xi)  
D = P - yi; Delta2=sum(D.^2); delta = sqrt(Delta2);  
%%%%% zobraz  
xx=linspace(xi(1), xi(N(2)),20); yy=polyval(poly, xx);  
plot(xx, yy, xi, yi, 'k*');
```