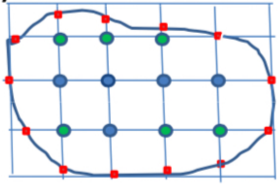
Parciální diferenciální rovnice

Cvičení 9.

8. dubna 2020

Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici

- **Úloha :** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$, v oblasti Ω, $u(x,y) = \varphi(x,y)$ na hranici oblasti Ω.
- **Numerické řešení**
  - Volíme **krok h, stejný na osách x a y**. Zadanou oblast Ω „pokryjeme sítí“, kterou tvoří **síťové přímky** rovnoběžné s osami x a y, **vzdálené o h** ve směru x i y.
  - Označíme a očíslujeme průsečíky síťových přímek – **uzly sítě** :
    - regulární
      (všechny 4 sousední uzly jsou ve vzdálenosti = h),
    - neregulární
      (aspoň jeden sousední uzel je ve vzdálenosti < h),
    - hraniční
      (průsečík síťové přímky s hranicí oblasti).



  - V regulárních uzlech sítě **nahradíme 2. derivace centrálními diferencemi.**
  - V neregulárních uzlech použijeme lineární interpolaci.

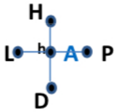
  Tím dostáváme numerické schéma.

  - **Pro každý vnitřní uzel sítě sestavíme rovnici** podle numerického schématu.
  - **Vyřešením soustavy rovnic získáme numerické řešení**
    (přibližné hodnoty hledané funkce u) v uzlech sítě $[x_i, y_j]$.

Nahrazení derivací v jednom uzlu

- **Úloha:** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$ v oblasti Ω, $u(x,y)=\varphi(x,y)$ na hranici oblasti Ω.

  Regulární uzel (např. **A**) má 4 sousední uzly (např. L,P,H,D) ve vzdálenosti **h**:



Nahrazení derivací v regulárním uzlu A

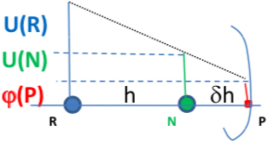
centrálními diferencemi :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{u(L)-2u(A)+u(P)}{h^2}+O(h^2)\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\frac{u(H)-2u(A)+u(D)}{h^2}+O(h^2)\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{zanedbáme chybu, dosadíme do rovnice}} \underbrace{-4U(A)+U(L)+U(P)+U(H)+U(D)=h^2 f(A)}_{\textbf{síťová rovnice pro regulární uzel A}}$$

Neregulární uzel (např. **N**) má sousední hraniční uzel (např. P) ve vzdálenosti δh, (0<δ<1), a na stejné síťové přímce má sousední regulární uzel (např. R) ve vzdálenosti h.

Hledanou hodnotu U(N) interpolujeme z hodnot

v regulárním uzlu U(R) a v hraničním uzlu u(P)=φ(P) :



$$\frac{U(R)-\varphi(P)}{h+\delta h}=\frac{U(R)-U(N)}{h}\Rightarrow\frac{U(R)-\varphi(P)}{1+\delta}=\frac{U(R)-U(N)}{1}\Rightarrow$$

$$U(R)-\varphi(P)=U(R)(1+\delta)-U(N)(1+\delta)\Rightarrow$$

$$\underbrace{(1+\delta)U(N)-\delta U(R)=\varphi(P)}_{\textbf{síťová rovnice pro neregulární uzel N}}$$

Příklad 1

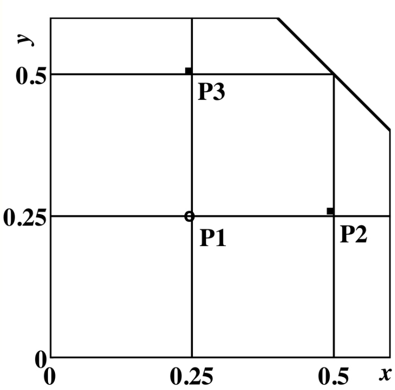
v Ω platí : $\quad -\Delta u = 1$

na hranici Ω : $\quad u(x, y) = 0.5$

Ω : pětiúhelník $ABCDE$:

$$\begin{aligned} A &= [0, 0] \\ B &= [0.6, 0] \\ C &= [0.6, 0.4] \\ D &= [0.4, 0.6] \\ E &= [0, 0.6] \end{aligned}$$

Volte $h = 0.25$,
sestavte síťové rovnice.



Příklad 2

v Ω platí : $\quad -\Delta u = y$

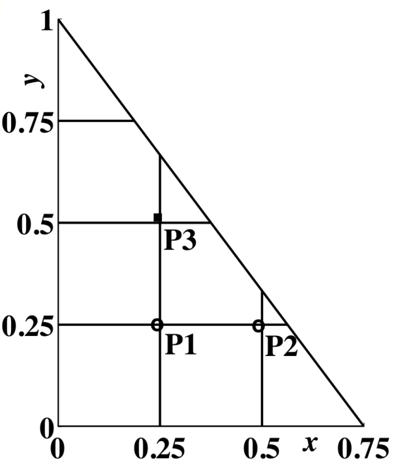
na hranici Ω : $\quad u(x, y) = x$

Ω : trojúhelník $ABCDE$:

$$\begin{aligned} A &= [0, 0] \\ B &= [0.75,\ 0] \\ C &= [0,\ 1] \end{aligned}$$

Volte $h = 0.25$,

sestavte síťové rovnice.



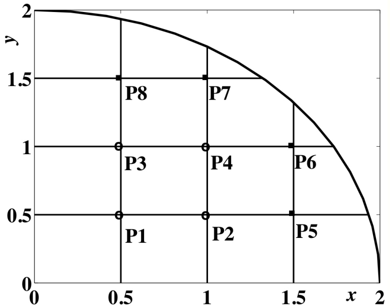
Příklad 3

v Ω platí : $\quad -\Delta u = 0$

na hranici Ω : $\quad u(x, y) = x + y$

$\Omega : \ \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4,$
$x > 0, y > 0\}$

Volte $h = 0.5$,
sestavte síťové rovnice.



Příklad 4

v Ω platí :	$-\Delta u = x$	Ω : čtyřúhelník	$A = [0, 0]$
			$B = [0.9,\ 0]$
na hranici Ω :	$u(x, y) = y$	$ABCDE$:	$C = [0.6,\ 1.2]$
			$D = [0,\ 1.2]$

Volte $h = 0.3$,
sestavte síťové rovnice.