ODR: Dirichletova úloha

Cvičení 8.

samostudium

1.dubna 2020

Obsah

Dirichletova (okrajová) úloha pro odr 2. řádu

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x), \quad y(a) = A, y(b) = B$$

v samoadjungovaném tvaru

$$-\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = A, y(b) = B$$

Postačující podmínky existence a jednoznačnosti řešení

- spojitost $p(x), p'(x), q(x), f(x)$ v intervalu $\langle a,\ b\rangle$
- $p(x) > 0$ v intervalu $\langle a,\ b\rangle$
- $q(x) \geq 0$ v intervalu $\langle a,\ b\rangle$

Nahrazení derivací v jednom uzlu

Zvolíme h a v intervalu $\langle a, b\rangle$ určíme uzly x_i. Zapíšeme diferenciální rovnici v bodě $x_i (0 < i < n)$: $-(p(x_i)y'(x_i))' + q(x_i)y(x_i) = f(x_i)$.
Označíme $z = p \cdot y'$ a nahradíme $z'(x_i)$ centrální diferencí, pomocí hodnot ve třech sousedních bodech $x_i - \frac{h}{2}$, x_i a $x_i + \frac{h}{2}$ vzdálených o $\frac{h}{2}$.
Dostaneme

$$(p(x_i)y'(x_i))' \ _{\text{označené jako}}\ z'(x_i) \approx \frac{z(x_i + \frac{h}{2}) - z(x_i - \frac{h}{2})}{h}, \quad \text{kde}$$

$$\begin{aligned} z(x_i + \tfrac{h}{2}) &= p(x_i + \tfrac{h}{2}) \cdot y'(x_i + \tfrac{h}{2}), \\ z(x_i - \tfrac{h}{2}) &= p(x_i - \tfrac{h}{2}) \cdot y'(x_i - \tfrac{h}{2}). \end{aligned}$$

Derivace $y'(x_i - \frac{h}{2})$ a $y'(x_i + \frac{h}{2})$ nahradíme centrálními diferencemi pomocí hodnot v sousedních bodech $x_i - h, x_i - \frac{h}{2}, x_i$ a $x_i, x_i + \frac{h}{2}, x_i + h$ vzdálených o $\frac{h}{2}$. Dostaneme

$$y'(x_i + \frac{h}{2}) \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h}, \quad y'(x_i - \frac{h}{2}) \approx \frac{y(x_i) - y(x_i - h)}{h}.$$

Tím jsme dostali $(p(x_i)y'(x_i))' \ _{\text{označené jako}}\ z'(x_i) \approx$

$$\frac{p(x_i + \frac{h}{2}) \cdot y(x_i + h)}{h^2} - \frac{p(x_i + \frac{h}{2}) \cdot y(x_i)}{h^2} - \\ - \frac{p(x_i - \frac{h}{2}) \cdot y(x_i)}{h^2} + \frac{p(x_i - \frac{h}{2}) \cdot y(x_i - h)}{h^2}$$

Odvození soustavy rovnic

Použijeme označení

- $\mathrm{Y}_i \approx y(x_i)$,
- $p_i = p(x_i),\; p_{i-\frac{1}{2}} = p\left(x_i - \frac{h}{2}\right),\; p_{i+\frac{1}{2}} = p\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$,
- $q_i \;=\; q(x_i)$,
- $f_i \;=\; f(x_i)$,

dosadíme do původní diferenciální rovnice, vynásobíme rovnici h^2 a přeskupíme členy.
Pro bod x_i dostáváme sít'ovou rovnici s neznámými $\mathrm{Y}_{i-1}, \mathrm{Y}_i, \mathrm{Y}_{i+1}$.

$$-p_{i-\frac{1}{2}}\mathrm{Y}_{i-1} + \left(p_{i-\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{1}{2}} + h^2 q_i\right)\mathrm{Y}_i - p_{i+\frac{1}{2}}\mathrm{Y}_{i+1} = h^2 f_i$$

Pro $i = 1$ je $\mathrm{Y}_{i-1} = \mathrm{Y}_0 = A$ a pro $i = n-1$ je $\mathrm{Y}_{i+1} = \mathrm{Y}_n = B$.
Rovnice pro všechny body $x_i, i = 1, \ldots, n-1$,

tvoří soustavu sít'ových rovnic.

Příklady

Ověření postačujících podmínek existence jediného řešení.

1. $-\big((1-2x)y'\big)' + y = -1, \qquad y(-2) = 2,\ y(0) = 2$
2. $-\big((x+1)y'\big)' + y = -(x+1), \qquad y(0) = 1,\ y(1) = 1$
3. $-\big(x^3y'\big)' + xy = -x^2, \qquad y(1) = 2,\ y(3) = 2$
4. $-\big(e^xy'\big)' - \dfrac{1}{x}y = x^2, \qquad y(-3) = 1,\ y(-1) = 0$
5. $-\big((x^2-4)y'\big)' - 3xy = 4 - x^2, \qquad y(-4) = 2,\ y(-3) = 1$
6. $y'' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y(2) = 3$

Příklady: soustavy rovnic

$1) -\left((1-2x)y'\right)' + y = -1, \qquad y(-2) = 2,\ y(0) = 2 \qquad h = 0.5$

1. uzly: základní x_i a vedlejší $x_{i\pm\frac{1}{2}}$

x_0		x_1		x_2		x_3		x_4
-2		-1.5		-1		-0.5		0
	$x_{1-\frac{1}{2}}$		$x_{1+\frac{1}{2}}$ $x_{2-\frac{1}{2}}$		$x_{3-\frac{1}{2}}$ $x_{2+\frac{1}{2}}$		$x_{3+\frac{1}{2}}$	
	-1.75		-1.25		-0.75		-0.25	

2. hodnoty funkce $p(x) = 1 - 2x$ ve vedlejších uzlech:

$x_{i\pm\frac{1}{2}}$	-1.75		-1.25		-0.75		-0.25
p	4.5		3.5		2.5		1.5

3. hodnoty funkcí $q(x), f(x)$ počítáme v základních uzlech, ale v tomto př. jsou 1 resp. -1 pro všechna x.

4. $-p_{i-\frac{1}{2}}\mathrm{Y}_{i-1} + \left(p_{i-\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{1}{2}} + h^2 q_i\right)\mathrm{Y}_i - p_{i+\frac{1}{2}}\mathrm{Y}_{i+1} = h^2 f_i$

   pro $i = 1$: $-4.5\mathrm{Y}_0 + (4.5 + 3.5 + 0.25)\,\mathrm{Y}_1 - 3.5\mathrm{Y}_2 = -0.25$

   pro $i = 2$: $-3.5\mathrm{Y}_1 + (3.5 + 2.5 + 0.25)\,\mathrm{Y}_2 - 2.5\mathrm{Y}_3 = -0.25$

   pro $i = 3$: $-2.5\mathrm{Y}_2 + (2.5 + 1.5 + 0.25)\,\mathrm{Y}_3 - 1.5\mathrm{Y}_4 = -0.25$

Dosadíme okrajové podmínky a zapíšeme soustavu rovnic maticově:

$$\begin{pmatrix} 8.25 & -3.5 & 0 \\ -3.5 & 6.25 & -2.5 \\ 0 & -2.5 & 4.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \mathrm{Y}_2 \\ \mathrm{Y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.75 \\ -0.25 \\ 2.75 \end{pmatrix}$$

Příklad 2: soustava rovnic

$$-\left((x+1)y'\right)' + y = -(x+1), \quad y(0) = 1,\ y(1) = 1, \quad h = 0.25$$

$$\begin{pmatrix} 2.5625 & -1.3750 & 0 \\ -1.3750 & 3.0625 & -1.6250 \\ 0 & -1.6250 & 3.5625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \mathrm{Y}_2 \\ \mathrm{Y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0469 \\ -0.0938 \\ 1.7656 \end{pmatrix}$$

Příklad 3

$$-\left(x^3 y'\right)' + xy = -x^2, \qquad y(1) = 2,\ \ y(3) = 2, \qquad h = 0.5$$

$$\begin{pmatrix} 7.6875 & -5.3594 & 0 \\ -5.3594 & 17.2500 & -11.3906 \\ 0 & -11.3906 & 32.8125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \mathrm{Y}_2 \\ \mathrm{Y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.3438 \\ -1 \\ 40.0313 \end{pmatrix}$$

Příklad 4

$$-\left(e^{x}y'\right)' - \frac{1}{x}y = x^{2}, \qquad y(-3)=1,\ y(-1)=0, \qquad h=0.5$$

$$\begin{pmatrix} 0.2693 & -0.1054 & 0 \\ -0.1054 & 0.4042 & -0.1738 \\ 0 & -0.1738 & 0.6269 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \mathrm{Y}_2 \\ \mathrm{Y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6264 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}$$