Několik příkladů

Příklad: řešení soustavy rovnic $Y' = F(x, Y), Y(x_0) = Y_0$

- zadání:

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{y_1}{x+y_3}, & y_1(-3) &= -1 \\ y_2' &= \sqrt{y_2+1}, & y_2(-3) &= 0 \\ y_3' &= y_1 - 2y_3, & y_3(-3) &= 2 \end{aligned},$$

určete přibližné hodnoty řešení v bodě $x = -2.$

- označíme:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}, \quad F(x, Y) = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x+y_3} \\ \sqrt{y_2+1} \\ y_1 - 2y_3 \end{pmatrix}$$

- a zapíšeme úlohu v nových označeních:

$$Y' = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x+y_3} \\ \sqrt{y_2+1} \\ y_1 - 2y_3 \end{pmatrix}, \quad Y(-3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Y, $F(x, Y)$ jsou vektorové funkce, tj. "vektory z funkcí".

Vektory umíme sčítat a násobit reálným číslem

Eulerova explicitní metoda

- Volíme (nebo je zadán) krok $h = 0.5$
- Kolik výpočetních kroků musíme provést? ... Dva.
- Prvním výpočetním krokem $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{Y}_0 + hF(x_0, \mathrm{Y}_0)$ určíme přibližné hodnoty $y_1(-2.5), y_2(-2.5), y_3(-2.5)$:

$$\mathrm{Y}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Y}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{\dfrac{-3+2}{\sqrt{0+1}}} \\ -1-2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- Druhým výpočetním krokem $\mathrm{Y}_2 = \mathrm{Y}_1 + hF(x_1, \mathrm{Y}_1)$ určíme přibližné hodnoty $y_1(-3), y_2(-3), y_3(-3)$:

$$\mathrm{Y}_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Y}_2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} \dfrac{-0.5}{\dfrac{-2.5-0.5}{\sqrt{0.5+1}}} \\ -0.5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{12} \\ \frac{1+\sqrt{1.5}}{2} \\ -0.25 \end{pmatrix}$$

Převod rovnice vyššího řádu na soustavu rovnic 1. řádu

Příklad 1

Je dána Cauchyova úloha pro neznámou funkci $y(x)$.

$$y'' = \frac{10}{x} - \frac{y'}{x} - 4\frac{y}{x^2}, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = 3$$

Rovnici převedeme na soustavu 2 rovnic 1. řádu (viz také MIII)

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & y \\ y_2 & = & y' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & \frac{10}{x} - \frac{1}{x}y_2 - \frac{4}{x^2}y_1 \end{array} \Rightarrow Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{10}{x} - \frac{1}{x}y_2 - \frac{4}{x^2}y_1 \end{pmatrix}}_{F(x,Y)}$$

Je to soustava **lineárních** diferenciálních rovnic, kterou můžeme zapsat také maticově:

$$Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{x^2} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{10}{x} \end{pmatrix}}_{F(x,Y}$$

Příklad 2

Je dána Cauchyova úloha pro neznámou funkci $y(t)$.

$$y''' = 3y'' - 3y' + y, \; y(0) = 1, y'(0) = 2, y'(0) = 3$$

Rovnici převedeme na soustavu 3 rovnic 1. řádu

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & y \\ y_2 & = & y' \\ y_3 & = & y''' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ y_3' & = & 3y_3 - 3y_2 + y_1 \end{array} \Rightarrow Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ 3y_3 - 3y_2 + y_1 \end{pmatrix}}_{F(t,Y)}$$

Je to soustava **lineárních** diferenciálních rovnic, kterou můžeme zapsat také maticově:

$$Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}}_{F(t,Y)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{Y_0}$$

Eulerova implicitní metoda

Je dána Cauchyova úloha $\dot{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{F(t,X)}, \ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Je dán krok $h = 0.5$. Určíme aproximaci řešení $X(0.5)$.

- $t_0 = 0, t_1 = t_0 + h = 0.5 \ldots\ldots$ jeden výpočetní krok.
- Eulerova implicitní metoda :$X_1 - hF(t_1, X_1) = X_0$, tj.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X_1} -0.5 \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{F(t_1,X_1)} \right] = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{X_0}$$

- zapíšeme $X_1 = EX_1$, kde E je jednotková matice a vytkneme X_1

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 0.5 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

- Řešení této soustavy lineárních rovnic je hledané X_1