ODR: Cauchyova úloha
bude doplněno ...

Cvičení 6 a 7: podklady ke cvičení pro samostudium

16. a 25. 3. 2020

Obsah

Cauchyova úloha (připomenutí z MIII)

Postačující předpoklady existence a jednoznačnosti řešení

- $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ spojitost $f(x, y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

  v oblasti, ve které leží $(x_0,\ y_0)$

- $\begin{cases} y_1' = f(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f(x, y_1, y_2) \\ y_1(x_0) = y_0^1, y_2(x_0) = y_0^2, \end{cases}$ spojitost $f(x, y_1, y_2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y_1}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y_2}$

- $\begin{cases} y'' = F(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$ spojitost $F(x, y, y')$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ a $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$

Převod $y'' = F(x, y, y')$ na soustavu rovnic:

označíme $\begin{matrix} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{matrix}$ zderivujeme $\begin{matrix} y_1' = y' \\ y_2' = y'' \end{matrix}$ tj. $\begin{matrix} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(x, y_1, y_2) \end{matrix}$

Aproximace funkce Taylorovym polynomem (připomenutí)

Množinu funkcí, které mají na intervalu $\mathcal{I}$ spojité derivace do řádu n označujeme $\mathcal{C}^{(n)}(\mathcal{I})$

Nechť $y = y(x)$ je v okolí bodu $x = x_0$ (resp. na intervalu $\mathcal{I} = \langle a,\ b\rangle$) spojitá a má na intervalu $\mathcal{I}$ spojitou 1. a 2. derivaci, tj. $y \in \mathcal{C}^{(2)}(\mathcal{I})$

Taylorův polynom 1. stupně v okolí bodu $x_0 \in \mathcal{I}$:

$$T_1(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0),$$

Lagrangeův zbytek: $R_2(x)$

existuje ξ mezi x a x_0, pro které

$$y(x) - T_1(x) = \underbrace{\frac{y''(\xi)}{2}(x - x_0)^2}_{R_2(x)},$$

pro $x = x_0 + h$

$$y(x_0 + h) \doteq T_1(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h,$$

$$R_2(h) = \frac{y''(\xi)}{2}h^2$$

Asymptotický horní odhad funkce ($\mathcal{O}$)

Definice Mějme funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+,\ g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.

$$\boxed{f \in \mathcal{O}(g) : \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \exists c \in \mathbb{R}^+ \ :\ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)}$$

tj. $\dfrac{n^2}{2} + 6n + 12 \in \mathcal{O}(n^2)$, protože např. pro $c = 10$ platí:

$$\forall n > 1 \text{ (tj. } n_0 = 1) : \tfrac{n^2}{2} + 6n + 12 \leq 10n^2$$

Pro funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{f \in \mathcal{O}(g) : \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \exists c \in \mathbb{R}^+ \ :\ \forall x \geq x_0 : |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|}$$

$$R_2(h) = \frac{y''(\xi)}{2} h^2 \quad : \quad R_2(h) \in \mathcal{O}(h^2)$$

$$y(x+h) = y(x) + y'(x) \cdot h + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\boxed{y' = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{\mathcal{O}(h^2)}{h} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \mathcal{O}(h)}$$

Nahrazení derivací diferencemi

První derivace: dopředná diference:

$y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i) \cdot h + \mathcal{O}(h^2) \Rightarrow$
$\frac{y(x_i+h)-y(x_i)}{h} = y'(x_i) + \frac{\mathcal{O}(h^2)}{h}$, tj. $\boxed{\frac{y(x_i+h)-y(x_i)}{h} = y'(x_i) + \mathcal{O}(h)}$,
tj. první derivace je nahrazena s chybou (přesností) 1. řádu ($\mathcal{O}(h)$).

První derivace: zpětná diference:

$y(x_i - h) = y(x_i) - y'(x_i) \cdot h + \mathcal{O}(h^2) \Rightarrow$
$\frac{y(x_i)-y(x_i-h)}{h} = y'(x_i) + \frac{\mathcal{O}(h^2)}{h}$, tj. $\boxed{\frac{y(x_i)-y(x_i-h)}{h} = y'(x_i) + \mathcal{O}(h)}$,
tj. první derivace je nahrazena s chybou (přesností) 1. řádu ($\mathcal{O}(h)$).

Zajímá nás, jaká <u>nejvyšší mocnina</u> kroku h je v odhadu chyby.

Nahrazení derivací diferencemi

První derivace: centrální diference:

$y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i) \cdot h + y''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$

$y(x_i - h) = y(x_i) - y'(x_i) \cdot h + y''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)$

Od $y(x_i + h)$ odečteme $y(x_i - h)$:

$y(x_i + h) - y(x_i - h) = 2y'(x_i) \cdot h + \mathcal{O}(h^3)$

vydělením $2h$ dostaneme

$\frac{y(x_i+h)-y(x_i-h)}{2h} = y'(x_i) + \frac{\mathcal{O}(h^3)}{2h}$, tj. $\boxed{\frac{y(x_i+h)-y(x_i-h)}{2h} = y'(x_i) + \mathcal{O}(h^2)}$,

tj. první derivace je nahrazena s chybou (přesností) 2. řádu ($\mathcal{O}(h^2)$).

Druhá derivace: centrální diference:

$y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i) \cdot h + y''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2} + y'''(x_i) \cdot \frac{h^3}{3!} + \mathcal{O}(h^4)$

$y(x_i - h) = y(x_i) - y'(x_i) \cdot h + y''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2} - y'''(x_i) \cdot \frac{h^3}{3!} + \mathcal{O}(h^4)$

Sečteme $y(x_i + h)$ a $y(x_i - h)$:

$y(x_i + h) + y(x_i - h) = 2y(x_i) + 2y''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^4)$

vydělením h^2 dostaneme

$\frac{y(x_i+h)-2y(x_i)+y(x_i-h)}{h^2} = y''(x_i) + \frac{\mathcal{O}(h^4)}{h^2}$, tj. $\boxed{\frac{y(x_i+h)-2y(x_i)+y(x_i-h)}{h^2} = y''(x_i) + \mathcal{O}(h^2)}$

tj. druhá derivace je nahrazena s chybou (přesností) 2. řádu ($\mathcal{O}(h^2)$).

Numerické metody řešení odr

Řešení nehledáme jako spojitou funkci, definovanou na celém zkoumaném intervalu $(a,\ b)$, ale **hodnoty přibližného řešení počítáme pouze v konečném počtu bodů**

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Těmto bodům říkáme **uzlové body** nebo **uzly sítě**, množině $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ říkáme **síť.**
Rozdíl $\boxed{h = x_{i+1} - x_i}$ se nazývá **krok sítě** v uzlu x_i.

Přibližné hodnoty řešení v uzlových bodech, vypočtené nějakou numerickou metodou, budeme značit y0,y1,...,yn, na rozdíl od hodnot přesného řešení, které budeme značit $y(x_0), y(x_1), \ldots, y(x_n)$.

Numerickým řešením je funkce, zadaná tabulkou hodnot

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_i	$\ldots$	y_n

Chceme-li znát přibližnou hodnotu řešení v jiném než uzlovém bodě, můžeme použít některou z **interpolačních metod**.

Eulerova explicitní metoda

Mějme dánu Cauchyovu (počáteční) úlohu

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

a pravidelnou síť $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ s krokem h.
Ve všech bodech sítě x_i podle rovnice platí

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$$

Derivaci na levé straně této rovnice nahradíme dopřednou diferencí,

$$y'(x_i) = \frac{\mathrm{y}_{i+1} - \mathrm{y}_i}{h} + \mathcal{O}(h),$$

resp. přibližnou hodnotu $y(x_{i+1})$ vypočítáme pomocí rovnice tečny, sestrojené v bodě $[x_i, y_i]$, která má směrnici rovnu zadané hodnotě $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$
Rovnice tečny: $y - y(x_i) = y'(x_i)(x - x_i) \Rightarrow$

$$\{y' = f(x_i, y(x_i)),\ (x_{i+1} - x_i) = h\}$$

$$y(x_{i+1}) \doteq \mathrm{y}_{i+1} = y(x_i) + h \cdot f(x_i, y(x_i))$$

Eulerova explicitní metoda

Nahradíme-li $y(x_i)$ přibližnou hodnotou `yi`, můžeme odtud vyjádřit přibližnou hodnotu $y(x_{i+1})$ jako

$$\boxed{\mathtt{y}_{\mathrm{i+1}}\ \mathtt{= yi + hf(xi,yi)}}$$

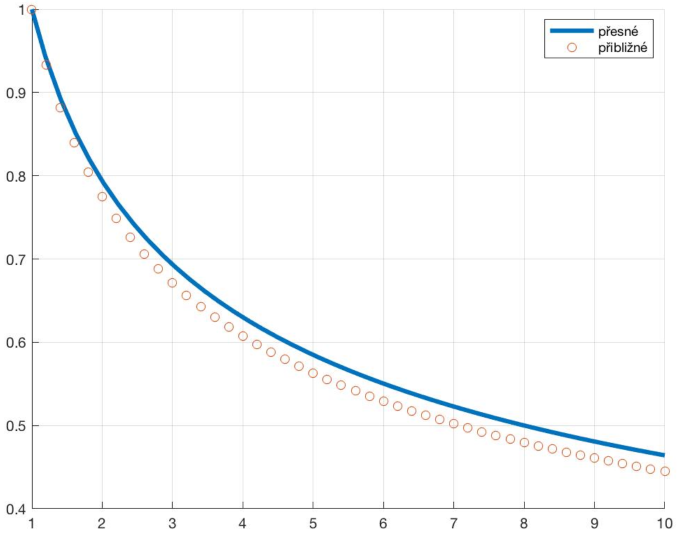
Pomocí tohoto vzorce vypočteme přibližnou hodnotu řešení v dalším uzlovém bodě pomocí hodnoty v uzlu předchozím.
Hodnotu řešení v bodě x_0 známe z počáteční podmínky, je rovna y_0.

Ovšem, s každým dalším krokem narůstá chyba. Proč?
Tečna v bodě $[x_0, y_0]$: všechny hodnoty jsou$(x_0, y_0, y' = f(x_0, y_0))$ přesné.
Neznámou $y(x_0 + h)$ určíme přibližně "pomocí rovnice tečny".
V dalším kroku sestrojíme tečnu v bodě

$$\underbrace{x_1 = x_0 + h}_{\text{přesné}},\ \underbrace{y_1 \doteq y(x_0 + h)}_{\text{nepřesné}},\ \underbrace{f(x_1, y_1)}_{y_1\ \text{nepřesné}}$$

A tak to pokračuje s větší a větší odchylkou.

Přesné a přibližné řešení



Přesné a přibližné (numerické) řešení

Krátce o chybách

Metoda konverguje, když $\forall x \in \langle a, b \rangle : \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}} y_n = y(x)$.

V jednom kroku metody se dopouštíme **lokální diskretizační chyby**

$$d_i = y(x_{i-1}) - \mathrm{y_{i-1}}.$$

Tyto chybu definujeme jako chybu našeho přibližného vzorce po dosazení přesného řešení. Většinou chybu upravujeme rozvojem do Taylorovy řady.

Řád metody $p \in \mathbb{N}$ **:** Pokud rozvoj lokální diskretizační chyby začíná mocninou h^{p+1}, $d_i \in \mathcal{O}(h^{p+1})$, říkáme, že metoda má řád p.

Globální diskretizační chyba:
jak se přibližné řešení liší od přesného – jak se projevuje "nakupení" lokálních diskretizačních chyb.

Když řešení v následujícím bodě počítáme z hodnoty v **jednom** předcházejícím **kroku**, říkáme, že metoda je – **jednokroková**.
Eulerova metoda patří mezi **jedno**krokové metody.

Pro jednokrokové metody p-tého řádu platí, že globální chyba je řádu h^p.
Eulerova metoda je jednokroková metoda prvního řádu.

Eulerova implicitní metoda

Ve všech bodech sítě x_i podle rovnice platí

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$$

Derivaci na levé straně této rovnice nahradíme zpětnou diferencí,

$$y'(x_i) = \frac{\mathrm{y}_i - \mathrm{y}_{i-1}}{h} + \mathcal{O}(h),$$

a dostaneme

$$\boxed{y_i - h \cdot \underbrace{f(x_i, y_i)}_{\text{obsahuje neznámou } \mathrm{y}_i} = y_{i-1}}$$

Pro **lineární** diferenciální rovnici y_i umíme dopočítat vždy, pro **nelineární** ?

Metody vyššího řádu přesnosti

Metody 2. řádu:

Collatzova metoda

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hk_2 \\ k_2 &= f(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2}k_1) \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \end{aligned}$$

Heunova metoda

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \tfrac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_2 &= f(x_i + h, y_i + hk_1) \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \end{aligned}$$

Runge-Kutta: metoda 4.řádu přesnosti

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_4 &= f(x + h, y + hk_3) \\ k_3 &= f(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2}k_2) \\ k_2 &= f(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{h}{2}k_1) \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \end{aligned}$$

Výběr délky kroku

- Zdálo by se, že čím menší krok ($h \to 0$,) tím přesnější výsledky dostaneme,
  ALE
- při "příliš" malém h (pro rozlišení čísel v počítači) dochází k chybnému výpočtu;
- také, čím menší h, tím více výpočetních kroků je nutné provést;
- obvyklý postup
  Volíme h, počítáme jeden krok; s krokem $h/2$ počítáme 2 kroky; porovnáme rozdíl hodnot $\mathrm{y_{i+1}}(h)$ a $\mathrm{y_{i+2}}(h/2)$.

Příklady

1. $y' = -\frac{1}{x^2}, \quad y(1) = 2$

   Přesné řešení (MIII)

   $$\int dy = \int -\frac{1}{x^2}\, dx \Rightarrow y = \frac{1}{x} + C \Rightarrow 2 = 1 + C \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{x} + 1}$$

   Eulerova explicitní metoda: volíme $h = 0.5$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
2	1.5	$1.5 - \frac{1}{2}\frac{1}{1.5^2}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

2. $y' = y^2 \sin(x), \quad y(0) = 2$

   Přesné řešení (MIII)

   $$\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int \sin x \, dx \dots$$

   interval řešení !

Soustava diferenciálních rovnic

Označíme $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$,

Soustavu o.d.r 1. řádu (případně počáteční úlohu)

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' & = & f_2(x, y_1, y_2) \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} y_1(x_0) & = & a \\ y_2(x_0) & = & b \end{array}$$

zapíšeme

$$Y' = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots) \\ \dots \end{pmatrix} \quad Y(x_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \dots \end{pmatrix}$$

a postup řešení Eulerovou metodou aplikujeme na celý vektor.

Příklad

$$Y' = \begin{pmatrix} \dfrac{y_1}{x + y_3} \\ \sqrt{y_2 + 1} \\ y_1 - 2y_3 \end{pmatrix} \quad Y(-3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Rovnice vyššího řádu: převod na soustavu rovnic 1. řádu:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = \dots$$

Označíme $y_1 = y,\ y_2 = y', \dots y_n = y^{(n-1)}$:

$$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \mathrm{Y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ f(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}}_{F\left(x, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right.}$$

Interpretace vypočtených hodnot (podle zavedených označení!):
v prvním řádku jsou přibližné **hodnoty hledané funkce**,
ve druhém řádku **hodnoty 1. derivace** atd.

Příklad

Rovnici 3. řádu

$$y''' - \frac{1}{1-x}y' - 1 = 0 \qquad \begin{aligned} y(-2) &= 1, \\ y'(-2) &= 5, \\ y''(-2) &= 2 \end{aligned}$$

převedeme na soustavu 3 rovnic

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \end{aligned}, \qquad Y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \dfrac{1}{1-x}y_2 + 1 \end{pmatrix} \qquad Y(-2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$Y' = \begin{pmatrix} 2y_1 + \frac{y_1}{y_2} \\ 2\ln y_1 + \frac{y_2}{x} \end{pmatrix} \qquad Y(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$h = 0.05$

$$y'' = \frac{1+x}{x^2} y' - 3y \ln x \qquad \begin{array}{rcl} y(1) & = & 2 \\ y'(1) & = & 0 \end{array}$$

$h = 0.2$

Příklady

1. $$y'' = 2y' - y + \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

2. $$y'' = \frac{10}{x} - \frac{y'}{x} - 4\frac{y}{x^2}$$

3. $$y'' = y - 2\frac{y'}{x}$$

4. $$y''' = 2\frac{y'}{x^2}$$

5. $$y''' = 3y'' - 3y' + y$$

6. $$y'''' = 5y'' - 4y + \sin(x)\cos(2x)$$

Úlohy, které modelujeme diferenciálními rovnicemi

- Chladnutí kávy, ropná skvrna, (separovatelné rovnice)
- Znečištění rybníka (lineární 1. řádu)
- Kmitání (lineární 2. řádu)
- Pohyb planet (soustava)

Ropná skvrna

Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že poloměr roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Sestavte diferenciální rovnici popisující tento proces a vyřešte ji – tj. zjistěte, jaká funkce popisuje proces zvětšování poloměru olejové skvrny v čase.

Označme:

$$x \ldots \text{ čas}$$
$$y = y(x) \ldots \text{ poloměr skvrny}$$

Rychlost růstu poloměru y je vyjádřena derivací y'. Derivace y' je tedy nepřímo úměrná funkci y^2. Nepřímá úměrnost znamená, že existuje konstanta $k \in \mathbb{R}$, že platí:

$$y' = k\frac{1}{y^2}$$

Ropná skvrna

Řešení rovnice

$$y' = k\frac{1}{y^2}$$

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= k\frac{1}{y^2} \\
y^2\,\mathrm{d}y &= k\,\mathrm{d}x \\
\frac{y^3}{3} &= kx + c \\
y^3 &= 3(kx + c) \\
y &= \sqrt[3]{3(kx + c)}
\end{aligned}$$

Chladnutí kávy

V kuchyni je teplota $T_0 = 20^\circ$. Za jak dlouho se právě zalitá vroucí káva ochladí na teplotu $T_2 = 50^\circ$?

Rychlost ochlazování tělesa na vzduchu (tj. změna teploty v čase) je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a vzduchu.

Označíme:

čas: t, teplotu v čase t: $T(t)$,

rychlost ochlazování v čase : $\dfrac{dT}{dt}$, konstantu úměrnosti k.

Experimentálně zjištěná konstanta $k = 0.04$

Proces změny teploty v čase popisuje obyčejná diferenciální rovnice:

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_0)\,, \quad T(0) = 100, \quad T(?) = 50 \quad k = 0.04$$

Řešení rovnice lze určit separací proměnných.

Řešením je funkce $T(t)$, která popisuje proces změny teploty v čase.

$$T(t) = T_0 + Ce^{-kt}, \quad C = T(0) - T_0 = 80, \quad T(24,5) = 50$$

Samočištění jezírka

V jezírku objemu V je jisté množství nečistot x,
na začátku (v čase $t = 0$) je množství nečistot x_0.
Do jezera přitéká čistá voda konstantní rychlostí r
a stejnou rychlostí odtéká voda s nečistotami.
Hladina vody se nemění.
Předpokládáme, že rozdělení nečistot je rovnoměrné, voda se "sama" promíchává.

r udává, jaký objem vody v jezeře se vymění za 1 den,
$\frac{r}{V}$ udává, jak velká část vody se vymění za 1 den.

Úbytek nečistot je přímo úměrný množství nečistot, které odtečou za jednotku času, tedy diferenciální rovnice, která toto modeluje :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{V}x, \quad x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 e^{-\frac{r}{V}t}$$

Funkce, která popisuje vývoj nečistot x v čase t je $x = x_0 e^{-\frac{r}{V}t}$

Koncentrace nečistot

Na začátku je v jezírku objemu V množství nečistot x_0, konstantní rychlostí r do jezírka přitéká množství nečistot za jednotku času $c(t)$.
Z jezírka odtéká voda stejnou rychlostí r, hladina se nemění.
Pro konstantní c lze úlohu řešit separací proměnných,
pro proměnné $c(t)$ je rovnice lineární.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{V}x + c(t), \quad x(0) = x_0$$

Například: Jezero objemu $V = 1000m^3$ je na začátku čisté. Rychlostí $r = 2m^3/h$ přitéká voda, ve které je koncentrace nečistot $3mg/m^3$.
Z jezera odtéká voda (s nečistotami) stejnou rychlostí.
Kdy voda v jezeře dosáhne koncentrace 1mg/h?

To znamená, že do jezera přitéká $2 \cdot 3\ mg/h$ nečistot,
odtéká $\frac{2}{1000}x\ mg/h$.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{1000}x + 6, \quad x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 500(6 - Ce^{-\frac{2}{1000}t}),\ C = 6$$

Kdy bude koncentrace 1? $\dfrac{x}{V} = 1 \quad \Rightarrow\ x = -500 \ln \dfrac{2}{3}$

Soustava 2 jezer

První jezero: objem $V_1\ m^3$, vtok čisté vody rychlostí $r\ m^3/h$, odtok znečištěné stejnou rychlostí.
Druhé jezero: objem $V_2\ m^3$, vtok znečištěné vody z prvního jezera rychlostí $r\ m^3/h$, odtok znečištěné stejnou rychlostí.
Konstanty samočištění: $k_1 = \frac{r}{V_1},\ k_2 = \frac{r}{V_2}$
Množství nečistot v prvním jezeře $x(t)$, ve druhém $y(t)$, v čase $t = 0$ je množství $x_0,\ y_0$. Soustava:

$$\begin{aligned} x' &= -k_1 x \\ y' &= +k_1 x \quad -k_2 y \end{aligned}$$

Můžeme převést na lineární rovnici :
z první rovnice $x = x_0 e^{-k_1 t} \Rightarrow y' + k_2 y = k_1 x_0 e^{-k_1 t}$.

Příklad: míchání tekutin

Do nádrže, která obsahuje 100ℓ vody s $40g$ soli vtéká tekutina rychlostí $4\ell/min$ s koncentrací soli $3g/\ell$ a vytéká z nádrže rychlostí $2\ell/min$. Voda je neustále promícháváná. Jaké je množství soli v nádrži v čase?

Označme $y(t)$ množství soli (v gramech), které je v nádrži v čase t, $V1$ rychlost, kterou do nádrže sůl přitéká,

$$V1 = (3g/\ell)(4\ell/min) = 12g/min.$$

$V2$ rychlost, kterou z nádrže vytéká.

$$V2 = \left(\frac{y(t)}{100+2t} g/\ell\right)(2\ell/min) = \frac{y(t)}{50+t} g/min.$$

Změnu množství soli v čase t lze popsat

(za předpokladu, že $y(t)$ je diferencovatelná funkce)

$$y' = V1 - V2, \quad y' = 12 - \frac{y(t)}{50+t}$$

Jedná se o lineární rovnici, jejíž obecné řešení je

$$y(t) = \frac{C}{50+t} + \frac{6t^2+600t}{50+t}.$$

V na začátku je ve vodě 40 g soli, tj. počáteční podmínka: $y(0) = 40$.

Proto je řešení $\dfrac{2000}{50+t} + \dfrac{6t^2+600t}{50+t}$.

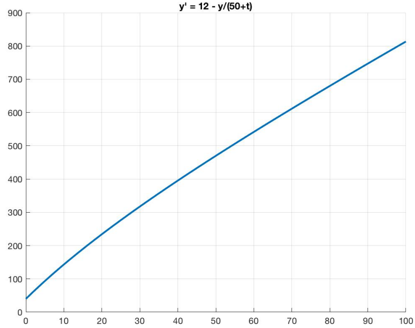
Příklad Míchání tekutin v Matlabu

Diferenciální rovnice a počáteční podmínka

$$y' = 12 - \frac{y(t)}{50+t}, \quad y(0) = 40$$

```
reseni = dsolve('Dy=12 - y/(50+t)','y(0) = 40')

reseni =
2000/(t + 50) + (6*t*(t + 100))/(t + 50)
```



graf řešení:

Příklad: Vývoj populace

Jedním z modelů vývoje poulace, která už je dostatečně velká, má omezené zásoby potravy i dalších zdrojů a mezi členy populace dochází k soupeření o tyto zdroje je

$$y' = ay(t) - by^2(t)$$

Konstanta a udává přírůstek populace za časovou jednotku, b popisuje soupeření o zdroje.
Jedná se o Bernoulliovu rovnici.

Příklad Vývoj populace

Diferenciální rovnice $y' = ay(t) - by^2(t)$

a, b byly odhadnuty pro vývoj poplulace v USA v letech 1790 - 1950.

$a = 0.03134, \; b = 1.5887 \cdot 10^{-10}, \quad t$: roky

Počáteční podmínka: v roce 1790 bylo v USA 3 929 000 obyvatel.

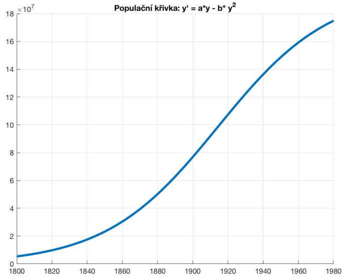
```
populace = dsolve('Dy = a*y - b* y^2', 'y(1790) = 3929000')

populaceUSA = subs(populace, {'a','b'}, {0.03134, 1.5887E-10})

populace1950 = double(subs(populaceUSA,[1800 1850 1900 1950]))
```

Srovnání statistických údajů a vypočtených hodnot:

Rok	Počet obyvatel	Vypočteno
1790	3 929 000	
1800	5 308 000	5 350 280
1850	23 192 000	23 248 685
1900	75 995 000	77 000 000
1950	150 697 000	148 777 550



Kmitání

Rovnicí

$$my'' + ky = 0$$

jsou popsány nevynucené (vlastní) kmity hmotného bodu o hmotnosti m, zavěšeného na pružině o tuhostosti k.

Kořeny charakteristické rovnice $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega$, tvar vlastních kmitů je dán obecným řešením

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

Jsou-li C_1, C_2 obě nenulové, můžeme upravit na tvar

$$y = A \sin(\omega x + \alpha),$$

kde $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},\ \alpha = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}$.

Tedy amplituda nevynucených kmitů je A, jejich frekvence ω.

$C_1 = A \sin \alpha, C_2 = A \cos \alpha, \beta = \omega x,$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

Tlumené kmity

Rovnicí

$$my'' + cy' + ky = 0$$

jsou popsány nevynucené tlumené kmity hmoty m zavěšené na pružině tuhosti k při vazkém tření c. $(m, k, c > 0)$
Tvar vlastních kmitů je dám obecným řešením

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x),$$

kde $\alpha = -\frac{1}{2}\frac{c}{m},\ \omega = \sqrt{\dfrac{4km - c^2}{4m^2}},\ 4km - c^2 > 0$
Řešení opět lze upravit na tvar

$$y = Ae^{\alpha x} \sin(\omega x + \varphi)$$

Tlumené kmity hmoty m jsou popsány funkcí obecného řešení, amplituda $F = Ae^{\alpha x}$ klesá exponenciálně s časem x $(\alpha < 0)$, frekvence je ω počáteční fáze $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{C_1}{C_2}$

Pohyb planety

Pohyb tělesa v gravitačním poli nehybného centrálního tělesa.

Celou úlohu omezíme na pohyb v rovině. Mějme nehybné těleso o hmotnosti M v počátku souřadnic. Okolo tohoto tělesa se pohybuje druhé těleso o hmotnosti m, které se v daný okamžik nachází v bodě o souřadnicích $\vec{r} = [r_x, r_y]$ a má rychlost $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Na toto těleso působí gravitační síla

$$F = \kappa \frac{mM}{r^3}\vec{r}, \quad r^3 = \left(\sqrt{r_x^2 + r_y^2}\right)^3$$

Pohybový zákon (zrychlení je úměrné síle) $\rightarrow$ pohybová rovnice 2. řádu.

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F(\vec{r})}{m}$$

Zavedením rovnice pro rychlost převedeme na soustavu rovnic 1.řádu.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{F(\vec{r})}{m} \end{aligned}$$

zapsáno po složkách

$$\begin{aligned} r_x' &= v_x \\ r_y' &= v_y \\ v_x' &= \frac{F_x}{m} = \frac{\kappa M}{\left(\sqrt{r_x^2 + r_y^2}\right)^3} r_x \\ v_y' &= \frac{F_y}{m} = \frac{\kappa M}{\left(\sqrt{r_x^2 + r_y^2}\right)^3} r_y \end{aligned}$$

Označíme

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix},$$

derivace:

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \frac{\kappa M}{r^3} r_x \\ \frac{\kappa M}{r^3} r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \frac{\kappa M}{(y_1^2+y_2^2)^3} y_1 \\ \frac{\kappa M}{(y_1^2+y_2^2)^3} y_2 \end{pmatrix}$$

Dodáme počáteční podmínky: počáteční polohu a rychlost tělesa.
Můžeme řešit numerickými metodami.
Zobrazení řešení: pro hodnoty t, ve kterých jsme počítali, jsou v prvním a druhém řádku vypočítány x-ové a y-ové souřadnice trajektorie pohybu.

Řešení v Matlabu symbolických proměnných, pomocí funkce `dsolve`

Parametry `dsolve` jsou:

- diferenciální rovnice, např. $y' = \dfrac{x^3}{y}$
- počáteční podmínka, např. $y(1) = 1$
- nezávisle proměnná, v našem př. x

Výsledek je symbolická proměnná.

```
ysym = dsolve('Dy = x^3 / y' , 'y(1)=1' , 'x')
```

Když nezadáme počáteční podmínku, funkce určí obecné řešení. Samozřejmě, ne vždy se podaří přesné řešení určit v symbolických proměnných.

Řešení v Matlabu Eulerovou numerickou metodou

- Zadáme funkci pravé strany `f(x,y)` rovnice $y' = f(x, y)$
- Zadáme krok `h`, počáteční podmínku `x0, y0` ($y(x_0) = y_0$) a poslední x-ovou hodnotu `xN`.
- Vytvoříme si vektor x-ových hodnot `xE` a místo pro výpočet přibližných hodnot řešení $y(x)$: `yE`.
- Na místo `yE(1)` uložíme počáteční hodnotu `y0`, ostatní `yE(k)` spočítáme Eulerovou metodou.

```
 f = @(x,y) x.^3  ./  y
 h = 0.1;  x0 = 1;  y0 = 1;  xN = 5;
xE = x0 : h : xN;
yE = zeros(1, length(xE));
for k = 1 : length(yE) - 1
   yE(k+1) = yE(k) + h*f(xE(k),y(k))
end
```

Řešení v Matlabu numerickou metodou, kterou realizuje funkce `ode45`

- Funkci, která odpovídá pravé straně diferenciální rovnice, zadáváme stejně, jako pro Eulerovu metodu,
  `jmeno_funkce  =  @( x, y ) vyraz`
- Počáteční podmínku a poslední x-ovou hodnotu také stejně
  `x0 = ...; y0 = ... ; xN = ... ;`
- Funkce `ode45` vrací vektor-sloupec hodnot nezávisle proměnné a vektor-sloupec hodnot řešení.

```
[xM yM] = ode45 ( f, [ x0  xN ], y0 );
```

Zobrazení řešení

V Matlabu lze pro vykreslení grafu použít funkci `plot`. Podrobnější informace získáte pomocí `help plot` nebo `doc plot`.
Stejnou funkcí lze zobrazit i výsledek, získaný v symbolických proměnných, když do `ysym` dosadíme (pomocí funkce `subs`) x-ové hodnoty, například z výsledku použití ode45.

```
yysym = double(subs(ysym, xM));

figure
hold on
grid on
plot(xM, yysym)
plot(xE, yE)
plot(xM, yM)
legend('symbolicke','Eulerova','ode45')
title('Grafy reseni')
```