Soustavy nelineárních rovnic

Newtonova iterační metoda

cvičení 5

Obsah

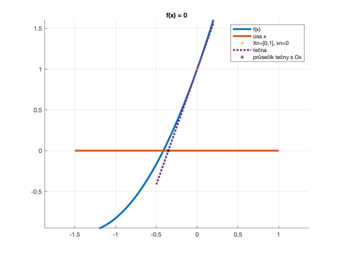
Newtonova metoda řešení nelineární rovnice

I. Je dána rovnice $f(x) = 0$.

a) Zapište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_n.

$$t: \quad y = f(x_n) + f'(x_n)\,(x - x_n)$$

b) Graficky znázorněte graf funkce $f(x)$ a tečnu ke grafu funkce v bodě x_n. Zakreslete průsečík této tečny s osou x (tj.$y = 0$), označte ho jako $[x_{n+1}, 0]$.



c) Z rovnice tečny a) vyjádřete x_{n+1}.

$$y = 0 \Rightarrow 0 = f(x_n) + f'(x_n)\,(x_{n+1} - x_x) \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

princip metody: hledáme průsečík grafu funkce f s osou x pomocí průsečíků tečen t s osou x; tečnu sestrojujeme v bodě x_n, určeném v předcházejícím kroku; x_0 volíme.

Newtonova metoda řešení dvou nelineárních rovnic

II. Jsou dány rovnice $f(x,y) = 0, g(x,y) = 0$

d) Zapište rovnici tečné roviny τ_1 ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě $X^{(n)} = (x_n, y_n)^T$.

$$\tau_1 : z = f(X^{(n)}) + \frac{\partial f(X^{(n)})}{\partial x}(x - x_n) + \frac{\partial f(X^{(n)})}{\partial y}(y - x_n)$$

e) Zapište rovnici tečné roviny τ_2 ke grafu funkce $g(x,y)$ v bodě $X^{(n)} = (x_n, y_n)^T$.

$$\tau_2 : z = g(X^{(n)}) + \frac{\partial g(X^{(n)})}{\partial x}(x - x_n) + \frac{\partial g(X^{(n)})}{\partial y}(y - x_n)$$

f) Sestavte soustavu **lin.** rovnic pro společný průsečík P rovin $z = 0$, rovin τ_1, τ_2.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{\partial f(X^{(n)})}{\partial x}x & + & \frac{\partial f(X^{(n)})}{\partial y}y & = & \frac{\partial f(X^{(n)})}{\partial x}x_n & + & \frac{\partial f(X^{(n)})}{\partial y}y_n & - & f(X^{(n)}) \\
\frac{\partial g(X^{(n)})}{\partial x}x & + & \frac{\partial g(X^{(n)})}{\partial y}y & = & \frac{\partial g(X^{(n)})}{\partial x}x_n & + & \frac{\partial g(X^{(n)})}{\partial y}y_n & - & g(X^{(n)})
\end{array}$$

g) Označte $X^{(n+1)} = (x_{n+1}, y_{n+1})^T = P$ a z předchozí rovnice vyjádřete $X^{(n+1)}$.

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f(X^{(n)})}{\partial x} & \frac{\partial f(X^{(n)})}{\partial y} \\ \frac{\partial g(X^{(n)})}{\partial x} & \frac{\partial g(X^{(n)})}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(X^{(n)}) \\ g(X^{(n)}) \end{pmatrix}$$

Soustava (lineárních) rovnic v maticovém zápisu

f) $$\overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f(X^{(n)})}{\partial x} & \frac{\partial f(X^{(n)})}{\partial y} \\ \frac{\partial g(X^{(n)})}{\partial x} & \frac{\partial g(X^{(n)})}{\partial y} \end{pmatrix}}^{J(X^{(n)})} \begin{pmatrix} x - x_n \\ y - y_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f(X^{(n)}) \\ g(X^{(n)}) \end{pmatrix}$$

$$J(X^{(n)}) \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X^{(n+1)}} - J(X^{(n)}) \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}}_{X^{(n)}} = - \begin{pmatrix} f(X^{(n)}) \\ g(X^{(n)}) \end{pmatrix}$$

g) $$J(X^{(n)}) X^{(n+1)} = J(X^{(n)}) X^{(n)} - \begin{pmatrix} f(X^{(n)}) \\ g(X^{(n)}) \end{pmatrix}$$

$$X^{(n+1)} = \underbrace{J(X^{(n)})^{-1} J(X^{(n)})}_{\mathbf{E}} X^{(n)} - J(X^{(n)})^{-1} \begin{pmatrix} f(X^{(n)}) \\ g(X^{(n)}) \end{pmatrix}$$

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - J(X^{(n)})^{-1} \begin{pmatrix} f(X^{(n)}) \\ g(X^{(n)}) \end{pmatrix}$$

Jedna rovnice a soustava rovnic

Soustava (dvou) rovnic:

$$f(x,y) = 0$$
$$g(x,y) = 0$$

Označíme:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ \\ g(x,y) \end{pmatrix}, \text{ tj. } F(X) = \begin{pmatrix} f(X) \\ \\ g(X) \end{pmatrix}$$

Jedna rovnice

$$f(x) = 0$$

Soustava rovnic

$$F(X) = 0$$

Postup řešení:

Jedna rovnice

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

Soustava rovnic

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - J(X^{(n)})^{-1} F(X^{(n)})$$

Příklad. Pro soustavu rovnic

$$\begin{aligned} f(x,y)=0: \quad x^2+y^2-4 &= 0 \\ g(x,y)=0: \quad \ln(2-x)-y &= 0 \end{aligned}$$

1. určete graficky přibližnou polohu všech řešení soustavy,
2. volte $X^{(0)} = (1,\ 2)^T$ a vypočtěte $X^{(1)}$ a $X^{(2)}$.

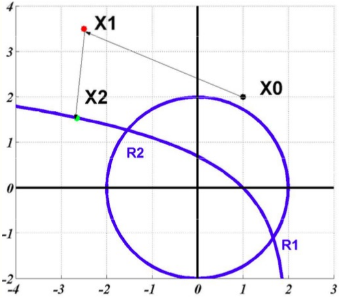
1. $J(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$

   $J(X) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{1}{2-x} & -1 \end{pmatrix}$
2. dosadíme $X^{(0)} = (1,2)^T$:

   $F(X^{(0)}) = (1,\ -2)^T$

   $J(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
3. vypočteme $\Delta^{(0)} = -J(X^{(0)})^{-1}F(X^{(0)})$

   $\Delta^{(0)} = (-3.5,\ 1.5)^T$
4. vypočteme $X^{(1)} = X^{(0)} + \Delta^{(0)}$



$X^{(1)} = (1,\ 2)^T + (-3.5,\ 1.5)^T$

$X^{(1)} = (-2.5,\ 3.5)^T$

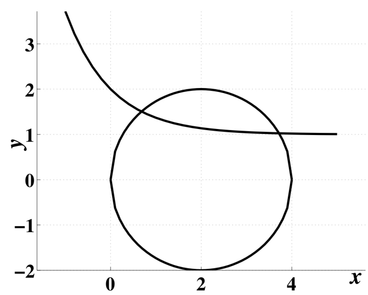
Pokračování, výpočet $X^{(2)}$

1. Matice J je stejná,
2. dosadíme $X^{(1)} = (-2.5,\ 3.5)^T$:
   $F(X^{(1)}) = (14.5,\ -2)^T$
   $J(X^{(1)}) = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -0.22 & -1 \end{pmatrix}$
   v každém kroku ověříme, zda se determinant $J \neq 0$
3. vypočteme $\Delta^{(1)} = -J(X^{(1)})^{-1} F(X^{(1)})$
   $\Delta^{(1)} = (0.08,\ -2.01)^T$
4. vypočteme $X^{(2)} = X^{(1)} + \Delta^{(1)}$
   $X^{(2)} = (-2.5,\ 3.5)^T + (-2.5,\ 3.5)^T$
   $X^{(2)} = (-2.42,\ 1.49)^T$

Příklad

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$
$$y - \mathrm{e}^{-x} - 1 = 0$$

1. Rozhodněte, který z bodů
   $A = [0, -2]$,
   $B = [2, 0]$,
   $C = [4, 1]$
   je možné volit jako počáteční aproximaci $X^{(0)}$, odpověď zdůvodněte.
2. pro vybraný bod $X^{(0)}$ určete $X^{(1)}$ Newtonovou metodou.

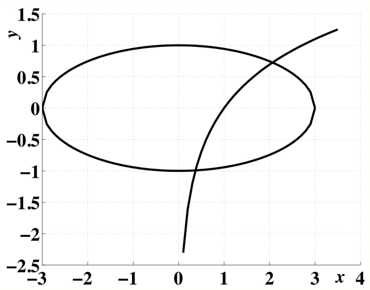


Výsledky: A,B volit nelze, protože $\det(J(A)) = 0$, $\det(J(B) = 0$,
C lze: $f(x, y), g(x, y)$ jsou diferencovatelné v okolí C a $\det(J(C)) \neq 0$.
$J = \begin{pmatrix} 2x-4 & 2y \\ e^{-x} & 1 \end{pmatrix}$, $J(A) = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $J(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-2} & 1 \end{pmatrix}$, $J(C) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ e^{-4} & 1 \end{pmatrix}$
$\Delta^{(0)} = (-0.2616,\ 0.0231)^T$, $X^{(1)} = (3.7384,\ 1.0231)^T$

Příklad

$$\frac{x^2}{9} + y^2 - 1 = 0$$
$$y - \ln(x) = 0$$

1. Rozhodněte, který z bodů
   $A = [1.5, 1]$,
   $B = [-1, 1]$,
   $C = [3, -1]$
   je možné volit jako počáteční aproximaci $X^{(0)}$, odpověď zdůvodněte.



2. pro vybraný bod $X^{(0)}$ určete $X^{(1)}$ Newtonovou metodou.

Výsledky: $B \notin D(g)$ - nelze, $\det(J(C)) = 0$ - C nelze,
A lze: $f(x,y), g(x,y)$ jsou diferencovatelné v okolí A a $\det(J(A)) \neq 0$.

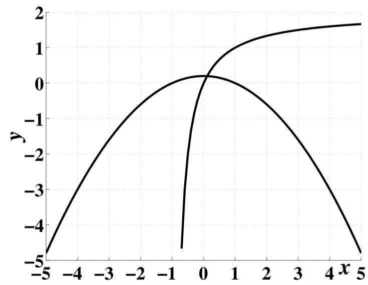
$J = \begin{pmatrix} \frac{2}{9}x & 2y \\ -\frac{1}{x} & 1 \end{pmatrix}$, $J(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$, $J(B)$není definován, $J(C) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

$\Delta^{(0)} = (0.5634,\ -0.2189)^T,\ X^{(1)} = (2.0634,\ 0.7811)^T$

Příklad

$$2x - y(1+x) = 0$$
$$x^2 + 5y - 1 = 0$$

1. Rozhodněte, který z bodů
   $B = [0,1]$,
   $C = [0,2]$
   je možné volit jako počáteční aproximaci $X^{(0)}$, odpověď zdůvodněte.
2. pro vybraný bod $X^{(0)}$ určete $X^{(1)}$ Newtonovou metodou.



Výsledky: $\det(J(C)) = 0$ - C nelze, B lze: $f(x,y), g(x,y)$ jsou diferencovatelné v okolí B a $\det(J(B)) \neq 0$.

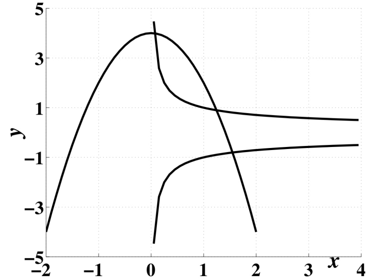
$J = \begin{pmatrix} 2-y & -(1+x) \\ 2x & 5 \end{pmatrix}$, $J(B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $J(C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$\Delta^{(0)} = (0.2,\ -0.8)^T,\ X^{(1)} = (0.2,\ 0.2)^T$

Příklad

$$\frac{1}{x} - y^2 = 0$$
$$2x^2 + y - 4 = 0$$

1. Rozhodněte, který z bodů
   $A = [0, 1]$,
   $B = [-0.5, -1]$,
   $C = [1, 2]$
   je možné volit jako počáteční aproximaci $X^{(0)}$, odpověď zdůvodněte.
2. pro vybraný bod $X^{(0)}$ určete $X^{(1)}$ Newtonovou metodou.

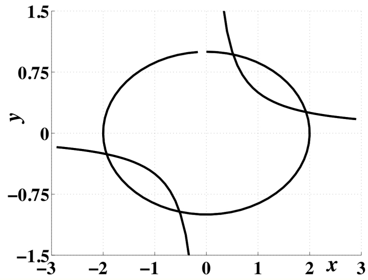


Výsledky: $A \notin D(f)$ - nelze, $\det(J(B)) = 0$ - B nelze,
C lze: $f(x,y), g(x,y)$ jsou diferencovatelné v okolí C a $\det(J(C)) \neq 0$.
$J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & -2y \\ 4x & 1 \end{pmatrix}$, $J(A) =$ není definován, $J(B) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $J(C) = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
$\Delta^{(0)} = (0.2,\ -0.8)^T,\ X^{(1)} = (1.2,\ 1.2)^T$

Příklad

$$\frac{1}{2x} - y = 0$$
$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

1. Zvolte $X^{(0)} = [1, 0]$ a určete $X^{(1)}$ a $X^{(2)}$ Newtonovou metodou,
2. určete řádkovou normu vektorů $F(X^{(0)})$, $F(X^{(1)})$ a $F(X^{(2)})$.



Výsledky: $J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2x^2} & -1 \\ 2x & 8y \end{pmatrix}$

$J(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $F(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$, $\Delta^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $X^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$J(X^{(1)}) = \begin{pmatrix} -0.08 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $F(X^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0.45 \\ -2.5 \end{pmatrix}$, $\Delta^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.31 \\ 0.47 \end{pmatrix}$, $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.19 \\ 0.22 \end{pmatrix}$

$\|F(X^{(2)}) - F(X^{(1)})\|_\infty \doteq 1.5$

Příklad

$$\begin{aligned} \alpha(x-1)^2 - y + 1 &= 0 \\ x^3 - y &= 0 \end{aligned}$$

1. Určete hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby při řešení dané soustavy Newtonovou metodou bylo možné volit jako počáteční aproximaci některý z bodů $A = [0.5, 0.5]$, $B = [0.8, 0.8]$ nebo $C = [0.1, 0.1]$.
2. Volte $\alpha = -1$ a určete počet a polohu všech řešení soustavy.
3. Volte $\alpha = -1$, $X^{(0)} = A$ a určete $X^{(1)}$ a $X^{(2)}$ Newtonovou metodou. Určete euklidovskou normu vektorů $F(X^{(0)})$, $F(X^{(1)})$ a $F(X^{(2)})$.
4. Pro stejný parametr α volte $X^{(0)} = B$, určete $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ a $X^{(3)}$ a euklidovskou normu vektorů $F(X^{(0)})$, $F(X^{(1)})$, $F(X^{(2)})$ a $F(X^{(3)})$.
5. Pro stejný parametr α volte $X^{(0)} = C$, určete $X^{(1)}$ a $X^{(2)}$ a euklidovskou normu vektorů $F(X^{(0)})$, $F(X^{(1)})$ a $F(X^{(2)})$.

Přítel MATLAB (s balíčkem Symbolic Toolbox)

Výpočet derivací (Jacobiho matice) v symbolických proměnných

```
syms x y                  % deklarace symbolickych promennych

f = -1*(x-1)^2 - y + 1;   % zadane rovnice f=0, g=0
g = x^3 - y ;
F = [f; g];               % vektor F

J=jacobian(F,[x y]);      % matice J
```

Výpočet jedné iterace

```
X0 = [0.5 ; 0.5];           % zvolene X0

FX0 = subs(F,{x y},X0');    % dosazeni X0
JX0 = subs(J,{x y},X0');

FX0 = double(FX0);          % prevedeni symbolickych vyrazu
JX0 = double(JX0);          % do ciselnych

Delta0 = JX0\(-FX0)         % vypocet "Delta", reseni lin.rovnic
X1 = X0 + Delta0            % vypocet X1
```

Přítel MATLAB (výpočet dvou iterací)

```
% -------------  první -----------------------------------
X0 = [0.5 ; 0.5];          % zvolene X0

FX0 = subs(F,{x y},X0’);   % dosazeni X0
JX0 = subs(J,{x y},X0’);

FX0 = double(FX0);         % prevedeni symbolickych vyrazu
JX0 = double(JX0);         % do ciselnych

Delta0 = JX0\(-FX0)        % vypocet "Delta", reseni lin.rovnic
X1 = X0 + Delta0           % vypocet X1
% -------------  druhá -----------------------------------
FX1 = subs(F,{x y},X1’);   % dosazeni X1
JX1 = subs(J,{x y},X1’);

FX1 = double(FX1);         % prevedeni symbolickych vyrazu
JX1 = double(JX1);         % do ciselnych

Delta1 = JX1\(-FX1)        % vypocet "Delta", reseni lin.rovnic
X2 = X1 + Delta1           % vypocet X2
```

Přítel MATLAB (výpočet N iterací)

```
N = 5;
X0 = [0.5 ; 0.5];                % zvolene X0

for k = 1 : N
  FX0 = subs(F,{x y},X0');     % dosazeni X0
  JX0 = subs(J,{x y},X0');

  FX0 = double(FX0);           % prevedeni symbolickych vyrazu
  JX0 = double(JX0);           % do ciselnych

  rez = norm(FX0)              % euklidovska norma F(X0)

  Delta0 = JX0\(-FX0)          % vypocet "Delta", reseni lin.rov.
  X1 = X0 + Delta0             % vypocet X1

  X0 = X1;                     % X0 prepiseme na X1 a pocitame dal
end
```