I t e r a č n í   m e t o d y
Jacobiho a Gaussova-Seidelova

$$AX = B \quad \rightarrow \quad X = UX + V$$

Jacobiho metoda a Gaussova-Seidelova metoda

Soustavu rovnic ve tvaru $Ax = b$ převedeme do tvaru $x = Ux + v$. **JAK?**
Matici soustavy A rozložíme na součet tří matic:
diagonální matici D,
dolní trojúhelníkovou matici s nulami na diagonále L
a horní trojúhelníkovou matici s nulami na diagonále U.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobiho matice U_J

$A \to U_J,\ b \to v_J$

$U_J = -D^{-1}(L + U),$

$v_J = D^{-1}b$

$A = D + L + U;\ (D + L + U)x = b$

$Dx + (L + U)x = b$

$Dx = b - (L + U)x$

hledaný tvar

$$x = \underbrace{-D^{-1}(L + U)}_{U_J}x + \underbrace{D^{-1}}_{v_J}b$$

Gaussova-Seidelova matice U_G

$A \to U_G,\ b \to v_G$

$U_G = -(D + L)^{-1}U,$

$v_G = (D + L)^{-1}b$

$A = D + L + U$

$(D + L)x = b - Ux$

$x = (D + L)^{-1}(b - Ux)$

hledaný tvar

$$x = \underbrace{-(D + L)^{-1}U}_{U_G}x + \underbrace{(D + L)^{-1}}_{v_J}b$$

Jacobiho metoda

Matice U_J a vektor v_J

$$U_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, v_J = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

kde a_{ij} jsou prvky matice soustavy A
b_i jsou prvky vektoru pravé strany b.

Jacobiho metoda: podmínky konvergence

- **postačující** podmínka platí $\boxed{\Rightarrow}$ metoda konverguje
  - matice A je ostře diagonálně dominantní (ODD)
  - existuje (aspoň jedna) norma matice U_J : $\|U_J\| < 1$
- **nutná a postačující** podmínka platí $\boxed{\Leftrightarrow}$ metoda konverguje
  - spektrální poloměr matice U_J : $\rho(U_J) < 1$

Určení spektrálního poloměru matice $\mathbf{U}_J$ z matice $\mathbf{A}$.
Vlastní čísla matice $\mathbf{U}_J$ určíme z rovnice:

$$\det\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

Jacobiova metoda - praktický výpočet

- Z první rovnice vyjádříme 1. neznámou
- Z druhé rovnice vyjádříme 2. neznámou
- Ze třetí rovnice vyjádříme 3. neznámou

...

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k\right) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k\right) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k - \cdots - a_{1n}x_n^k\right) \\
\vdots \quad & \vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{11}x_1^k - a_{12}x_2^k - \cdots - a_{1n-1}x_{n-1}^k\right)
\end{aligned}$$

- Postupně (**v libovolném pořadí**) vypočítáme nové, přesnější, hodnoty $x^{(k+1)}$. Do výrazů na pravé straně dosazujeme za $x^{(k)}$ hodnoty vypočítané na předcházejícím kroku.

Gaussova-Seidelova metoda

Iterační matice U_G (a vektor v_G) (**lze se bez nich obejít!**)

$$U_G = -(D+L)^{-1}U \quad v_G = (D+L)^{-1}b$$

kde L, D, U (viz výše) jsou matice, pro které $A = L + D + U$.

Podmínky konvergence

- **postačující** podmínka platí $\boxed{\Rightarrow}$ metoda konverguje
  - matice A je ostře diagonálně dominantní (ODD)
  - matice A je symetrická pozitivně definitní
  - existuje (aspoň jedna) norma matice U_G : $\|U_G\| < 1$
- **nutná a postačující** podmínka platí $\boxed{\Leftrightarrow}$ metoda konverguje
  - spektrální poloměr matice U_G : $\rho(U_G) < 1$

Určení spektrálního poloměru matice $\mathbf{U}_G$ z matice $\mathbf{A}$.

Vlastní čísla matice $\mathbf{U}_G$ určíme z rovnice:

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\lambda}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \boxed{\lambda}a_{21} & \boxed{\lambda}a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \boxed{\lambda}a_{31} & \boxed{\lambda}a_{32} & \boxed{\lambda}a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \boxed{\lambda}a_{n1} & \boxed{\lambda}a_{n2} & \boxed{\lambda}a_{n3} & \cdots & \boxed{\lambda}a_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

Gaussova-Seidelova metoda - praktický výpočet

Z první rovnice vyjádříme 1. neznámou $x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k\right)$

Z druhé rovnice vyjádříme 2. neznámou $x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k\right)$

Ze třetí rovnice vyjádříme 3. neznámou $x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - \cdots - a_{1n}x_n^k\right)$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{11}x_1^{k+1} - a_{12}x_2^{k+1} - \cdots - a_{1n-1}x_{n-1}^{k+1}\right)$$

Postupně (**v pořadí od x_1 k x_n**) vypočítáme nové, přesnější, hodnoty $\mathbf{x}^{(k+1)}$. Do výrazů <u>na pravé straně</u> <u>dosazujeme</u> za x_i hodnoty vypočtené na tomto kroku (pokud jsou k dispozici) nebo na předcházejícím kroku, tj.

při výpočtu $\mathbf{x}_i^{(k+1)}$ dosadíme $x_1^{(k+1)}\, \mathbf{x}_2^{(k+1)} \ldots \mathbf{x}_{i-1}^{(k+1)}$ a $\mathbf{x}_{i+1}^{(k)} \ldots \mathbf{x}_n^{(k)}$.

Jacobiho a Gaussova-Seidelova metody: srovnání.

Postačující podmínky konvergence (pro matici A)

Jacobi

- A je ODD

Gauss Seidel

- A je ODD
- A je symetrická pozit. def.

Nutná a postačující podmínka konvergence: $\rho(U) < 1$.

Určení $\rho(U_J),\ \rho(U_G)$ z matice A

Jacobi

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} & \dots \end{vmatrix} = 0$$

Gauss Seidel

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & \dots \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \dots \end{vmatrix} = 0$$

Výpočet:

Jacobi

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)})}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)})}{a_{33}} \end{aligned}$$

Gauss Seidel

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)})}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)})}{a_{33}} \end{aligned}$$

P Ř Í K L A D Y

Jacobiho metoda: příklad 1

Je dána soustava rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Ukažte, že pro danou soustavu konverguje Jacobiova metoda.
2. Určete $\vec{x}^{(1)}$ a $\vec{x}^{(2)}$ užitím Jacobiovy metody při volbě $\vec{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.
3. Vypočtěte řádkovou normu $\|\vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)}\|$.

Jacobiho metoda: příklad 2

Je dána soustava rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \beta & -2 \\ \beta & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

1. Určete všechna $\beta \in \mathbb{R}$, pro která je matice A ostře diagonálně dominantní.
2. Pro $\beta = 1$ určete $\vec{x}^{(1)}$ a $\vec{x}^{(2)}$ užitím Jacobiovy metody při volbě $\vec{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.
3. Vypočtěte sloupcovou normu $\|\vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)}\|$.

Gaussova - Seidelova metoda: příklad 1

Je dána soustava rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

1. Určete všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro něž je splněna některá z postačujících podmínek konvergence (pro matici A, ne U_G) Gaussovy-Seidelovy metody.
2. Určete všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro něž je splněna nutná a postačující podmínka konvergence této metody.
3. Vypočtěte $\vec{x}^{(1)}$ a $\vec{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\vec{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ a $\alpha = 2$.

Gaussova - Seidelova metoda: příklad 2

Je dána soustava rovnic $G\vec{x} = \vec{h}$, kde

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & \varphi^2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{h} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Určete všechna $\varphi \in \mathbb{R}$, pro která konverguje Gaussova-Seidelova metoda.
2. Pro $\varphi = -3$ určete $\vec{x}^{(1)}$ touto metodou při volbě $\vec{x}^{(0)} = \vec{h}$.

Jacobi nebo Gauss - Seidel?

Jsou dány soustavy rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$ a $C\vec{x} = \vec{d}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \; \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1. Rozhodněte, kterou soustavu rovnic je možné řešit Jacobiovou a kterou Gaussovou-Seidelovou metodou. Odpověd' zdůvodněte.
2. Volte $\vec{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ a vypočítejte $\vec{x}^{(1)}$ a $\vec{x}^{(2)}$ zvolenou metodou.
3. Je možné odhadnout chybu $\vec{x}^{(2)}$? Odpověd' zdůvodněte.

Jacobiho metoda metoda: příklad 3

Je dána soustava rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 6 & a & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Určete všechna $a \in \mathbb{R}$, pro něž konverguje Jacobiova iterační metoda.

b) Zvolte $a = 1$, $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$ a určete pomocí Jacobiovy metody $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$.

c) Použijijte výsledky z bodu **b)** a spočtěte řádkovou normu $\|A\vec{x}^{(2)} - \vec{b}\|$.

d) Zvolte $a = 1$ a $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$. Je možné odhadnout chybu Jacobiovy metody pro danou úlohu? Pokud ano, vyberte vhodnou normu a odhadněte chybu $\|\vec{x}^{*} - \vec{x}^{(5)}\|$. Kolik iteračních kroků by bylo zapotřebí k určení přibližného řešení s chybou ne větší než 10^{-4}?

Gaussova - Seidelova metoda: příklad 3

Je dána soustava lineárních algebraických rovnic ve tvaru $A\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Určete všechna $a \in \mathbb{R}$, pro něž Gaussova-Seidelova iterační metoda konverguje.

b) Pro která $a \in \mathbb{R}$ je splněna některá z postačujících podmínek konvergence Gaussovy-Seidelovy metody pro matici A?

c) Pro $a = -2$ určete $\rho(U_G)$.

d) Při volbě $\vec{x}^{(0)} = (1, 0, 1)^T$ a $a = -1$ spočtěte touto metodou $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$.

e) Použijte výsledky z bodu **d)** a vypočtěte sloupcovou normu $\|A\vec{x}^{(2)} - \vec{b}\|$.

Jacobiho metoda: příklad 4

Je dána soustava rovnic $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & \beta \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\beta \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Určete množinu $\mathcal{B}$ všech parametrů $\beta \in \mathbb{R}$, pro něž lze k řešení soustavy užít Jacobiho iterační metodu.
2. Pro $\beta = -2$ určete $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\vec{x}^{(0)} = \vec{b}$

Gaussova - Seidelova metoda: příklad 4

Je dána soustava rovnic $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \varphi^2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Určete všechna $\varphi \in \mathbb{R}$, pro která konverguje Gaussova-Seidelova iterační metoda pro danou soustavu
2. Pro $\varphi = -2$ určete $\vec{x}^{(1)}$ touto metodou při volbě $\vec{x}^{(0)} = \vec{b}$

Gaussova - Seidelova metoda: příklad 5

Je dána soustava rovnic $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 + s^2 & -0.5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Ukažte, že Gaussova-Seidelova pro danou soustavu konverguje právě tehdy, když $|s| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, kde $s \in \mathbb{R}$
2. Pro $s = 0$ určete $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$

S H R N U T Í

Metody Jacobiho a Gaussova-Seidelova: shrnutí

- Zapište tři rovnice, které jsou dány maticovým zápisem $Ax = b$ (po složkách).

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

- Z 1. rovnice vyjádřete x_1, z druhé rovnice x_2 a ze třetí x_3.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & = & \frac{1}{a_{11}} & (& b_1 & - & a_{12}x_2 & - & a_{13}x_3 &) \\ x_2 & = & \frac{1}{a_{22}} & (& b_2 & - & a_{21}x_1 & - & a_{23}x_3 &) \\ x_3 & = & \frac{1}{a_{33}} & (& b_3 & - & a_{31}x_1 & - & a_{32}x_2 &) \end{array}$$

- Definujte jakým iteračním postupem se počítají aproximace řešení dané soustavy rovnic pomocí

Jacobi

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)})}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)})}{a_{33}} \end{aligned}$$

Gauss Seidel

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)})}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)})}{a_{33}} \end{aligned}$$

Metody Jacobiho a Gaussova-Seidelova: shrnutí

- Uveďte jaké vlastnosti matice A jsou postačující k tomu, aby byla iterační metoda konvergentní.

  Postačující podmínky konvergence (pro matici A)

  Jacobi

  - A je ODD (ostře diagonálně dominantní)

  Gauss-Seidel

  - A je ODD
  - A je symetrická a pozitivně definitní

- Uveďte, co jsou iterační matice Jacobiho U_J a Gaussovy-Seidelovy U_G metody.

  Jacobiho metoda

  $U_J = -D^{-1}(L+U)$,

  Gaussova-Seidelova

  $U_G = -(D+L)^{-1}U$,

  kde $A = U + D + L$,

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Metody Jacobiho a Gaussova-Seidelova: shrnutí

- Jakým způsobem lze počítat jejich spektrální poloměr pouze se znalostí matice A?

  Určení vlastních čísel matic U_J a U_G z matice A

  Jacobiho

  $$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} & \dots \end{vmatrix} = 0$$

  $$\rho(U_J) = \max_i \{ \ |\lambda_i| \ \}$$

  Gaussova-Seidelova

  $$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & \dots \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \dots \end{vmatrix} = 0$$

  $$\rho(U_G) = \max_i \{ \ |\lambda_i| \ \}$$

- Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence Jacobiho metody?

  $\rho(U_J) < 1$

- Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence Gaussovy-Seidelovy metody?

  $\rho(U_G) < 1$

P O Z D R A V Y   Z   M A T L A B U

Výpočet Jacobiho metodou

`A` je matice soustavy, `B` pravá strana, `X0` známé hodnoty `X` (předcházející iterace), `XN` počítaná iterace, `n` rozměr: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B, X0, XN \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, `pocet` : počet iterací

jedna iterace

```
for k = 1 : n
   XN(k) = (B(k)-sum(A(k,:)*X0))/A(k,k) +X0(k);
end
```

`pocet` **iterací**

```
for kk = 1 : pocet
   for k = 1 : n
      XN(k) = (B(k)-sum(A(k,:)*X0))/A(k,k) +X0(k);
   end
   X0 = XN
 end
```

Výsledkem bude pouze poslední vypočtená iterace `XN`.

Výpočet Gaussovou-Seidelovou metodou

`A` je matice soustavy, `B` pravá strana, `X0` známé hodnoty `X` (předcházející iterace), novou iteraci zapisujeme do téhož vektoru; `n` rozměr: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B, X0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

jedna iterace

```
for k = 1 : n
   X0(k) = (B(k)-sum(A(k,:)*X0))/A(k,k) +X0(k);
    % rozdíl od Jacobiho metody:
    % ihned přepisujeme prvky vektoru X0
end
```

`M` iterací

```
for kk = 1 : M
   for k = 1 : n
      X0(k) = (B(k)-sum(A(k,:)*X0))/A(k,k) +X0(k);
   end
   X0     % bez středníku, pouze výpis
          % aktuálně spočtené iterace
end
```

Výsledkem bude pouze poslední vypočtená iterace `X0`.

Iterační matice a spektrální poloměry

`tril(A)`, `triu(A)` vrací dolní resp. horní trojúhelníkovou matici (s hlavní diagonálou),

`diag(A)` vrací hlavní diagonálu (jako vektor), `diag(diag(A))` je matice D

Matice L,D,U, pro které A=L+D+U (viz výše)

`D = diag(diag(A))` součet L+D: `LD = tril(A);` `U = triu(A)-D`

Iterační matice U_J, U_G

```
UJ =(-1)*(tril(A) + triu(A) - 2*D) ./ diag(A)
vJ = b ./ diag(A)

UG = -inv(LD)*U
vG =  inv(LD)*b
```

Spektrální poloměry $\rho(U_J)$, $\rho(U_G)$

```
rhoUJ = max(abs(eig(UJ)))
rhoUG = max(abs(eig(UG)))
```