Ostře diagonálně dominantní matice

Čtvercová matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ostře diagonálně dominantní, když

-
$$\text{pro } \textbf{všechny řádky } i = 1, \dots n \text{ platí: } |a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{i,j}|$$

- nebo

$$\text{pro } \textbf{všechny sloupce } j = 1, \dots n \text{ platí: } |a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{j,i}|$$

Příklad: matice

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ je ODD (po řádcích) , $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ je ODD (po sloupcích)

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je ODD , $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & \alpha \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ není ODD (pro žádné $\alpha \in \mathbb{R}$)

Symetrická pozitivně definitní matice

Čtvercová **symetrická** matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivně definitní, právě tehdy, když

- pro každý nenulový vektor $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^T A x > 0$;
- všechna vlastní čísla matice A jsou kladná;
- všechny hlavní minory matice A jsou kladné.

Poznámka:
Matice A je **symetrická**, když $\forall i, j = 1, \ldots, n : a_{i,j} = a_{j,i}$, tj. $A = A^T$.
(matice, které nejsou symetrické, neuvažujeme).
Příklad: Matice **A**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

je symetrická, její hlavní minory:

$$a_{11} = \boxed{2} > 0, \quad \boxed{18-16} = 2 > 0, \quad \det A = 90+8+8-9-8-80 = 9 > 0.$$

A je pozitivně definitní.

Příklady: symetrické matice

Matice $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je pozitivně definitní. $(\lambda_1 = \lambda_2 = 1)$

Matice $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ není pozitivně definitní.
Hlavní minory:
1. řádu $a_{11} = 1 > 0$,
2. řádu: $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3 < 0$

Matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ je pozitivně definitní.
Hlavní minory:
1. řádu $a_{11} = 2 > 0$,
2. řádu: $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$,
3. řádu: $\det A = 4 > 0$

Příklady

Zjistěte, zda matice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \gamma & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & \beta \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi^2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

jsou ostře diagonálně dominantní, symetrické pozitivně definitní;
pro která reálná čísla $\gamma, \beta, \varphi \in \mathbb{R}$

Řešení

- matice **P** není ODD, je symetrická pozitivně definitní.
- matice **R** je ODD pro $|\gamma| > 2$, tj. $\gamma \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$;
  matice **je symetrická** a její hlavní minory jsou:
  1. řádu $= \gamma$, 2. řádu: $\begin{vmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, 3. řádu: $\det \mathbf{R} = 6\gamma - 5$
  Všechny hlavní minory kladné pro $\gamma > 0 \wedge \gamma > \frac{1}{2} \wedge \gamma > \frac{5}{6}$,
  tj. matice je pozitivně definitní pro $\gamma \in (\frac{5}{6}, \infty)$
- matice **S** není ODD; matice není symetrická!

Pozdrav z Matlabu

- symetrická pozitivně definitní matice P

```
je_symPD = all(all(P==P')) && all(eig(P)>0)
```

- ostře diagonálně dominantní matice P

  ověření pro řádky

```
isODDr = all(diag(abs(P))' > (sum(abs(P)) - diag(abs(P))'))
```

  podrobněji:

```
abP = abs(P)                               %pracujeme s prvky v abs. hodnotách
diagonalni = diag(abP)                     %je sloupec
soucty_po_sloupcich = sum(abP)             %je řádek
soucty_bez_diagonalniho = sum(abP)-diagonalni' %je radek
diagonalni' > soucty_bez_diagonalniho          %je radek log. hodnot
all(diagonalni' > soucty_bez_diagonalniho)     % je logicka hodnota
```

  ověření pro sloupce

```
isODDc = all(diag(abs(P)) > (sum(abs(P),2) - diag(abs(P))))

soucty_po_radcich = sum(abP,2)                    %je sloupec
soucty_bez_diagonalniho_c = sum(abP,2)-diagonalni %je sloupec
diagonalni > soucty_bez_diagonalniho_c            %je sloupec
```