Iterační metody

Nehledáme přesné, ale přibližné řešení.

- Najdeme vhodný předpis: $X^{(k+1)} = F(X^{(k)})$
- Zvolíme počáteční aproximaci řešení $X^{(0)}$ a určitým postupem ji v každém kroku metody zlepšíme – vypočteme $X^{(k+1)} = F\left(X^{(k)}\right)$.
- K řešení se přibližujeme postupně a obecně ho dosáhneme až v limitě, tj. $\lim_{k\to\infty} \{X^{(k)}\} = X^*$
- Protože výpočet nelze provádět do nekonečna, po jisté době jej ukončíme, např., když $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon$
- Výsledkem bude přibližné řešení $X^{(k+1)}$.

Například:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_k} + x_k\right), \quad x_0 = 1$$

Vypočítané hodnoty x_k:

k	0	1	2	3
x_k	1.0000	1.5000	1.4167	1.4142

Prostá iterační metoda řešení soustavy lineárních rovnic

Soustava rovnic je ve tvaru:

$$x = Ux + v$$

Podmínky konvergence:

- postačující: existuje norma matice U:

  $$\boxed{||U|| < 1} \ \boxed{\Rightarrow}$$

  - metoda konverguje k přesnému řešení x^* a platí
  - $||x^{(k)} - x^*|| \leq \dfrac{||U||}{1 - ||U||} ||x^{(k)} - x^{(k-1)}||$
  - $||x^{(k)} - x^*|| \leq \dfrac{||U||^k}{1 - ||U||} ||x^{(1)} - x^{(0)}||$
- nutná a postačující :

  $\boxed{\rho(U) < 1}$ $\boxed{\Leftrightarrow}$ metoda konverguje k přesnému řešení x^*

Prostá iterační metoda: příklad 1

Zjistěte, zda soustavu rovnic $\vec{x} = \mathbf{U}\vec{x} + \vec{v}$, kde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ -0.7 & -0.8 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -0.7 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0.4 & 1 \\ -0.5 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2.7 \\ 2.7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

lze řešit prostou iterační metodou.
V kladném případě určete $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$

Prostá iterační metoda: příklad 2

Je dána soustava rovnic $\vec{x} = \mathbf{U}\vec{x} + \vec{v}$, kde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -0.8 & 0.15 \\ 1+p & -0.6 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$$

1. Určete všechna $p \in \mathbb{R}$, pro něž je splněna postačující podmínka konvergence prosté iterační metody pro danou soustavu.
2. Pro $p = -1.3$ určete $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. Odhadněte $\|\vec{x}^{*} - \vec{x}^{(2)}\|$, kde $\vec{x}^{*}$ je přesné řešení soustavy.

Prostá iterační metoda: příklad 3

Je dána soustava rovnic $\vec{x} = \mathbf{U}\vec{x} + \vec{v}$, kde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} p & -0.4 \\ 0.9 & p \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Určete všechna $p \in \mathbb{R}$, pro něž je splněna:
   α) nutná a postačující podmínka a
   β) postačující podmínka konvergence prosté iterační metody pro danou soustavu.
2. Pro $p = 0$ určete $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\vec{x}^{(0)} = \vec{v}$
3. Určete $\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}\|_\infty$

Prostá iterační metoda: příklad 4

Je dána soustava rovnic $\vec{x} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ -0.5 & -0.4 & 1 \\ 0.5 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Určete všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro něž je splněna nutná a postačující podmínka konvergence prosté iterační metody pro danou soustavu.
2. Pro $\alpha = 0.5$ určete $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$

Prostá iterační metoda: příklad 5

Je dána soustava rovnic $\vec{x} = \mathbf{R}\vec{x} + \vec{s}$, kde

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.1 & t+1 & -0.3 \\ 0.4 & -0.3 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & t+0.5 \end{pmatrix} \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1.7 \\ -1.8 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

1. Určete všechna $t \in \mathbb{R}$, pro něž je splněna postačující podmínka konvergence prosté iterační metody pro danou soustavu.
2. Pro $t = -0.5$ určete $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$
3. Vypočtěte $\|\vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(1)}\|_\infty$

Prostá iterační metoda: shrnutí

Soustava rovnic je ve tvaru $X = UX + V$.

- Definujte pojem spektrální poloměr matice U.

  $\rho(U) = \max_i \{|\lambda_i|\}$

- Jak se počítají aproximace řešení pomocí prosté iterační metody?

  Volíme $X^{(0)}$, počítáme $X^{(k+1)} = UX^{(k)} + V, k = 0, 1, \ldots$

- Definujte, co znamená, že prostá iterační metoda je pro danou soustavu konvergentní? $\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = X^*$

- Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence této metody? $\rho(U) < 1$

- Jaká podmínka pro normu matice U zaručuje konvergenci této metody? existuje $\|U\| < 1$

- Uveďte v jakém případě není metoda konvergentní. $\rho(U) \geq 1$