Parciální diferenciální rovnice

Vlnová rovnice
Cvičení 11.

22. dubna 2020

Vlnová rovnice

- **Úloha**

V oblasti Ω=(a, b)x(0, T), kde a, b, T$\in$R, a<b, T>0 je dána $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$, $c \in$ R, c >0

Ω=(a, b)x(0, ∞)

s **počátečními** podmínkami(**t=0**, x $\in$ <a,b>) $\quad u(x,0) = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$

a **okrajovými** podmínkami (**x=a**, **x=b**, t$\geq$0) $\quad u(a,t) = \alpha(t), u(b,t) = \beta(t)$

- **Postup řešení**
  - Ověření **podmínek souhlasu** v bodech [x=a, t=0] a [x=b, t=0]:

    $\boxed{\varphi(a) = \alpha(0), \psi(a) = \alpha'(0) \text{ a } \varphi(b) = \beta(0), \psi(b) = \beta'(0)}$
  - Volba časového prostorového **kroku h** a časového **kroku** τ a ověření **stability:**

    explicitní - stabilní při $\boxed{\dfrac{c\,\tau}{h} \leq 1}$, implicitní - stabilní $\forall\tau$,h (nepodmíněně)
  - Volba **numerické metody** : **explicitní** nebo **implicitní metoda sítí.**
  - Se zvolenými kroky h, τ **vytvoříme síť:** uzly sítě jsou body $P_i^{(k)} = [x_i, t_k]$, $x_i = a + ih$, $t_k = \tau k$.

    Množina uzlů $P_i^{(k)}$ tvoří při pevném k tzv. **k-tou časovou vrstvu.**

    Numerické řešení jsou vypočítané hodnoty $U_i^{(k)}$ přibližné hodnoty $u(P_i^{(k)})$ v uzlech sítě.

    Hodnoty $U_i^{(k)}$ určujeme ve směru rostoucího t, po jednotlivých časových vrstvách.

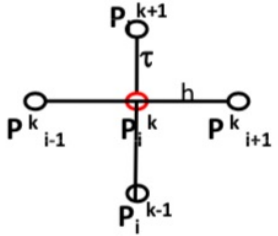
Nahrazení derivací v jednom uzlu: $\mathbf{P}_i^k = \mathbf{P}[x_i, t^k]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathbf{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Druhé derivace - **centrálně**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u(P_i^{k-1}) - 2u(P_i^k) + u(P_i^{k+1})}{\tau^2} + O(\tau^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(P_{i-1}^k) - 2u(P_i^k) + u(P_{i+1}^k)}{h^2} + O(h^2)$$



Explicitní schéma

Dosazením do rovnice a upravením dostaneme:

$$\frac{U_i^{k-1} - 2U_i^k + U_i^{k+1}}{\tau^2} = c^2 \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f(x_i, t^k)$$

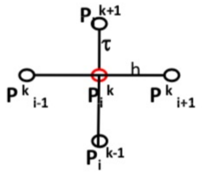
$$U_i^{k-1} - 2U_i^k + U_i^{k+1} = \frac{c^2\tau^2}{h^2}\left(U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k\right) + \tau^2 f(x_i, t^k)$$

$$\boxed{U_i^{k+1} = \frac{c^2\tau^2}{h^2}\left(U_{i-1}^k + U_{i+1}^k\right) + 2\left(1 - \frac{c^2\tau^2}{h^2}\right)U_i^k - U_i^{k-1} + \tau^2 f(x_i, t^k)}$$

explicitní schéma pro $\mathbf{k+1 \geq 2}$, $i = 1, \ldots, n-1$, stabilní při $\boxed{\frac{\mathbf{c}\tau}{\mathbf{h}} \leq \mathbf{1}}$ $\boxed{\frac{\mathbf{c}^2\tau^2}{\mathbf{h}^2} \leq \mathbf{1}}$

Výpočet:

U_i^0	$=$	$\varphi(x_i)$	$i = 0, \ldots, n$	počáteční podmínka
U_0^k	$=$	$\alpha(t^k)$	$k = 0, \ldots$	okrajová podmínka
U_n^k	$=$	$\beta(t^k)$	$k = 0, \ldots$	okrajová podmínka



$k = 1?$

První časová vrstva $\mathbf{U}_i^1$

Počáteční podmínky:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

$$\underbrace{u(x_i, t_0+\tau)}_{t_0=0} = \underbrace{u(x_i, t_0)}_{\varphi(x_i)} + \underbrace{\frac{\partial u(x_i, t_0)}{\partial t}}_{\psi(x_i)} \tau + \mathcal{O}(\tau^2)$$

$$\boxed{\mathbf{U_i^1} = \varphi(\mathbf{x_i}) + \tau\psi(\mathbf{x_i})}$$

Příklad 1

Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1),\ t > 0$$

počáteční podmínky

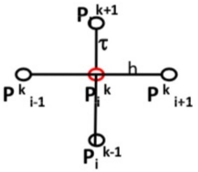
$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= x(2-x) \end{aligned}\right\} x \in \langle 0, 1 \rangle$$

okrajové podmínky

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= t \\ u(1,t) &= t \end{aligned}\right\} t \geq 0$$

1. Ověření podmínek souhlasu.
2. Volba h, τ : $h = 0.2,\ \tau = 0.1$ a ověření stability.
3. Zadaný bod $A = [0.8,\ 0.2]$. Výpočet U(A).

	x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$t = 0$	U_i^0				*	U(E)	*
$t = 0.1$	U_i^1				U(B)	U(C)	U(D)
$t = 0.2$	U_i^2					U(A)	



Příklad 2

Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(x+t) \quad x \in (0,7),\ \ t > 0$$

počáteční podmínky

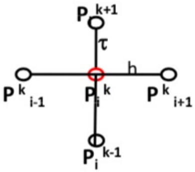
$$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = x - 5 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2x, \end{array}\right\} x \in \langle 0, 7\rangle$$

okrajové podmínky

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = -5 \\ u(1,t) = 14t + 2 \end{array}\right\} t \geq 0$$

1. Ověření podmínek souhlasu.
2. Volba h, τ : $h = 1,\ \tau = 0.5$ a ověření stability.
3. Zadaný bod $A = [2,\ 1.5]$. Výpočet U(A).

	x_i	0	1	2	3	4
$t = 0$	U_i^0	*	*	*	*	*
$t = 0.5$	U_i^1	*	*	U(E)	*	*
$t = 1$	U_i^2		U(B)	U(C)	U(D)	
$t = 1.5$	U_i^3			U(A)		



Implicitní schéma: nepodmíněně stabilní

V bodě (x_i, t^k):
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ nahradíme centrálně, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ průměrem hodnot derivací v časech t^{k-1} a t^{k+1}.

$$\frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2} = \frac{c^2}{2}\left[\frac{U_{i+1}^{k-1} - 2U_i^{k-1} + U_{i-1}^{k-1}}{h^2} + \frac{U_{i+1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i-1}^{k+1}}{h^2}\right] + f(x_i, t^k)$$

Upravíme: vynásobíme τ^2, U^{k+1} necháme na levé straně, U^{k-1}, U^k na pravé straně.

$$-\frac{c^2\tau^2}{2}\frac{U_{i+1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i-1}^{k+1}}{h^2} + U_i^{k+1} = \frac{c^2\tau^2}{2}\frac{U_{i+1}^{k-1} - 2U_i^{k-1} + U_{i-1}^{k-1}}{h^2} - U_i^{k-1} + 2U_i^k + \tau^2 f(x_i, t^k)$$

Upravíme: v levé straně sečteme členy U_i^{k+1}

$$-\frac{c^2\tau^2}{2h^2}U_{i-1}^{k+1} + (1 + \frac{c^2\tau^2}{h^2})U_i^{k+1} - \frac{c^2\tau^2}{2h^2}U_{i+1}^{k+1} = \frac{c^2\tau^2}{2h^2}(U_{i-1}^{k-1} + U_{i+1}^{k-1}) - (1 + \frac{c^2\tau^2}{h^2})U_i^{k-1} + 2U_i^k + \tau^2 f(x_i, t^k)$$

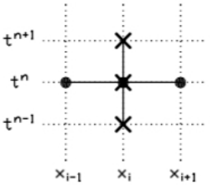
Označíme $\sigma = \dfrac{c\tau}{h}$

$$\boxed{-\frac{\sigma^2}{2}U_{i-1}^{k+1} + (1+\sigma^2)U_i^{k+1} - \frac{\sigma^2}{2}U_{i+1}^{k+1} = \frac{\sigma^2}{2}U_{i-1}^{k-1} - (1+\sigma^2)U_i^{k-1} + \frac{\sigma^2}{2}U_{i+1}^{k-1} + 2U_i^k + \tau^2 f(x_i, t^k)}$$

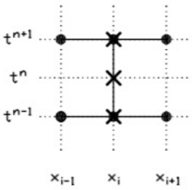
Implicitní schéma: maticový zápis

$$
\begin{pmatrix}
1+\sigma^2 & -\frac{\sigma^2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\
-\frac{\sigma^2}{2} & 1+\sigma^2 & -\frac{\sigma^2}{2} & 0 & \vdots \\
0 & -\frac{\sigma^2}{2} & 1+\sigma^2 & -\frac{\sigma^2}{2} & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{\sigma^2}{2} \\
0 & \cdots & 0 & -\frac{\sigma^2}{2} & 1+\sigma^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
U_1^{k+1} \\ U_2^{k+1} \\ \vdots \\ U_{n-2}^{k+1} \\ U_{n-1}^{k+1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\overbrace{\frac{\sigma^2}{2}(U_0^{k-1}+U_2^{k-1})-(1+\sigma^2)U_1^{k-1}}^{\text{hodnoty vrstvy k-1}} \quad \overbrace{+2U_1^k}^{\text{hodnoty vrstvy k}} \quad +\tau^2 f(x_1,t^k) \quad + \overbrace{\frac{\sigma^2}{2}U_0^{k+1}}^{\text{okrajová podm.}} \\
\frac{\sigma^2}{2}(U_1^{k-1}+U_3^{k-1})-(1+\sigma^2)U_2^{k-1} \quad +2U_2^k \quad +\tau^2 f(x_2,t^k) \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\frac{\sigma^2}{2}(U_{n-3}^{k-1}+U_{n-1}^{k-1})-(1+\sigma^2)U_{n-2}^{k-1} \quad +2U_{n-2}^k \quad +\tau^2 f(x_{n-2},t^k) \\
\frac{\sigma^2}{2}(U_{n-2}^{k-1}+U_n^{k-1})-(1+\sigma^2)U_{n-1}^{k-1} \quad +2U_{n-1}^k \quad +\tau^2 f(x_{n-1},t^k) \quad +\frac{\sigma^2}{2}U_n^{k+1}
\end{pmatrix}
$$

explicitní schéma



implicitní schéma



Příklad : Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{9}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x, \quad x \in (0,3),\ t > 0$$

počáteční podmínky

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= x(x-3) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 3x+1 \end{aligned}\right\} x \in \langle 0,3\rangle$$

okrajové podmínky

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= \ln(1+t) \\ u(1,t) &= 10t \end{aligned}\right\} t \geq 0$$

1. Ověření podmínek souhlasu.
2. Volba h, τ : $h = 0.6$, $\tau = 0.4$, $\sigma = \frac{c\tau}{h} = \frac{1.5 \cdot 0.4}{0.6} = 1$,
   lze použít explicitní i implicitní schéma.
3. Výpočet
   - explicitní metodou:

	x_i	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3
$t = 0$	U_i^0	0	-1.44	-2.16	-2.16	-1.44	0
$t = 0.4$	U_i^1	$\ln 1.4$	-0.32	-0.32	0.4	1.84	4
$t = 0.8$	U_i^2	$\ln 1.8$	1.5525	2.432	3.968	6.244	8

•Výpočet implicitní metodou

$$\text{Matice soustavy pro neznámé } U_i^2 : \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

• Výpočet pravé strany soustavy rovnic:

	x_i	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3
$t = 0$	U_i^0	0	-1.44	-2.16	-2.16	-1.44	0
$t = 0.4$	U_i^1	$\ln 1.4$	-0.32	-0.32	0.4	1.84	4
	$f(x_i, t^1)$		0.6	1.2	1.8	2.4	
pravá strana			. . . 3.099	. . . 4.144	. . . 7.216	. . . 19.728	
$t = 0.8$	U_i^2	$\ln 1.8$	1.3605	2.342	3.864	5.898	8