Parciální diferenciální rovnice

Rovnice vedení tepla
Cvičení 10.

15. dubna 2020

Rovnice vedení tepla

- **Úloha**

V oblasti Ω=(a, b)x(0, T), kde a, b, T$\in$R, a<b, T>0 je dána $\dfrac{\partial u}{\partial t} = p\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$, $p \in$ R, p >0

s **počáteční** podmínkou (**t=0**, x $\in$ <a,b>) u(x,0) = φ(x)

a **okrajovými** podmínkami (**x=a**, **x=b**, t$\geq$0) u(a,t) = α(t), u(b,t)=β(t)

- **Postup řešení**
  - Ověření **podmínek souhlasu**, tj. shody hodnot u(x,t) daných počáteční a okrajovou podmínkou v bodech [x=a, t=0] a [x=b, t=0]: $\boxed{\varphi(a) = \alpha(0) \text{ a } \varphi(b) = \beta(0)}$
  - Volba časového prostorového **kroku h** a časového **kroku τ** a ověření **stability numerické metody**:
    explicitní - stabilní při $\boxed{\dfrac{p\tau}{h^2} \leq 0.5}$, implicitní - stabilní $\forall\tau$,h (nepodmíněně)
  - Volba **numerické metody** : **explicitní** nebo **implicitní metoda sítí.**
  - Se zvolenými kroky h, τ **vytvoříme síť:** uzly sítě jsou body $P_i^{(k)} = [x_i, t_k]$, x_i=a+ ih, $t_k = \tau k$.
    Množina uzlů $P_i^{(k)}$ tvoří při pevném k tzv. **k-tou časovou vrstvu**.
    Numerické řešení jsou vypočítané hodnoty $U_i^{(k)}$ přibližné hodnoty $u(P_i^{(k)})$ v uzlech sítě.
    Hodnoty $U_i^{(k)}$ určujeme ve směru rostoucího t, po jednotlivých časových vrstvách.

Nahrazení derivací v jednom uzlu: $\mathbf{P}_i^k = \mathbf{P}[x_i, t^k]$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{p}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

- druhou derivaci:

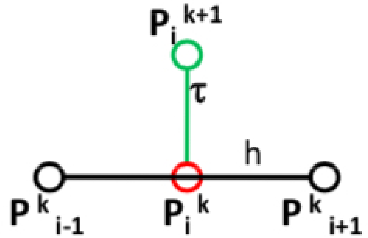
  "centrálně"

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(P_{i-1}^k) - 2u(P_i^k) + u(P_{i+1}^k)}{h^2} + O(h^2)$$

- první derivaci:

  "dopředně"

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(P_i^{k+1}) - u(P_i^k)}{\tau} + O(\tau)$$



Dosazením do rovnice dostaneme **explicitní schéma**:

$$\frac{u(P_i^{k+1}) - u(P_i^k)}{\tau} = p\,\frac{u(P_{i-1}^k) - 2u(P_i^k) + u(P_{i+1}^k)}{h^2} + f(P_i^k)$$

$$\underbrace{\mathrm{U}_i^{k+1} = \frac{p\tau}{h^2}\mathrm{U}_{i-1}^k + \left(1 - 2\frac{p\tau}{h^2}\right)\mathrm{U}_i^k + \frac{p\tau}{h^2}\mathrm{U}_{i+1}^k + \tau f(P_i^k)}_{\text{rovnice pro uzel } P_i^{k+1},\ \text{pro } i=1,\dots,n-1,\ k\geq 0}$$

Pro $t = 0$:

$\mathbf{U}_i^0 = \varphi(x_i)$

$x = a$: $\mathbf{U}_0^k = \alpha(t_k)$

$x = b$: $\mathbf{U}_n^k = \beta(t_k)$

Explicitní schéma

Rovnice pro výpočet hodnoty $\mathbf{U}_i^{k+1}$:

$$\mathbf{U}_i^{k+1} = \frac{p\tau}{h^2}\mathbf{U}_{i-1}^k + \left(1 - 2\frac{p\tau}{h^2}\right)\mathbf{U}_i^k + \frac{p\tau}{h^2}\mathbf{U}_{i+1}^k + \tau f(x_i,\ \ t^k)$$

$k = 0, 1, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$

Pro $t = 0 : \mathbf{U}_i^0 = \varphi(x_i), \quad x = a : \ \mathbf{U}_0^k = \alpha(t_k), \quad x = b : \ \mathbf{U}_n^k = \beta(t_k)$

stabilní pro $\dfrac{p\tau}{h^2} \leq \dfrac{1}{2}$

chyba $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$

Příklad

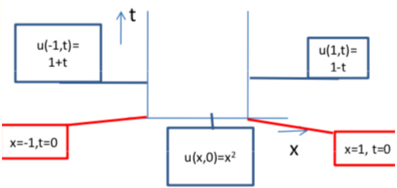
1. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla:

v oblasti $\Omega = \{[x,t]: x \in (-1, 1), t>0\}$:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x - t$$

s počáteční a okrajovou podmínkou:
$$\begin{cases} u(x,0) = x^2 & x \in \langle -1, 1 \rangle \\ u(-1,t) = 1+t & t \geq 0 \\ u(1,t) = 1-t & t \geq 0 \end{cases}$$

- Ověření podmínek souhlasu:

  $x = -1, \ t = 0:$
  $u(-1,0) = (-1)^2$
  $u(-1,0) = 1 + 0$
  $x = 1, \ t = 0:$
  $u(1,0) = 1^2$
  $u(1,0) = 1 - 0$



- Volba kroků $h, \ \tau$

  Volíme $h = 0.5$ a určíme maximální τ tak, aby explicitní schéma bylo stabilní a bod $[0, \ 0.2]$ byl uzlem sítě.
  $\tau \leq 0.125 \Rightarrow \tau_{max} = 0.1$

Výpočet hodnot užitím explicitního schématu

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
	-1	-0.5	0	0.5	1

1. Nultá časová vrstva: $t = 0$: $U_i^0 = x_i^2$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
	-1	-0.5	0	0.5	1
U^0	1	0.25	0	0.25	1

2. První časová vrstva:$t = \tau = 0.1, \quad \frac{p\tau}{h^2} = 0.4$:
$\mathbf{U}_i^1 = 0.4 \cdot \mathbf{U}_{i-1}^0 + (1 - 2 \cdot 0.4) \cdot \mathbf{U}_{i-1}^0 + 0.4 \cdot \mathbf{U}_{i-1}^0 + 0.1 \cdot 2x_i$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
	-1	-0.5	0	0.5	1
U^0	1	0.25	0	0.25	1
U^1	1+0.1	0.35	0.2	0.55	1-0.1

3. Druhá časová vrstva:$t = 2\tau = 0.2$:
$\mathbf{U}_i^2 = 0.4 \cdot \mathbf{U}_{i-1}^1 + (1 - 2 \cdot 0.4) \cdot \mathbf{U}_{i-1}^1 + 0.4 \cdot \mathbf{U}_{i-1}^1 + 0.1 \cdot (2x_i - 0.1)$
$u(0,\ 0.2) \doteq \mathbf{U}_2^2 = 0.39$

Nahrazení derivací v jednom uzlu: $\mathbf{P}_i^k = \mathbf{P}[x_i, t^k]$

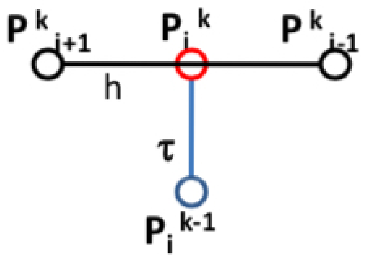
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{p}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

- druhou derivaci: "centrálně"

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(P_{i-1}^k) - 2u(P_i^k) + u(P_{i+1}^k)}{h^2} + O(h^2)$$

- první derivaci: "zpětně"

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(P_i^k) - u(P_i^{k-1})}{\tau} + O(\tau)$$



Dosazením do rovnice dostaneme **implicitní schéma**:

$$\underbrace{-\frac{p\tau}{h^2}\mathrm{U}_{i-1}^k + \left(1 + 2\frac{p\tau}{h^2}\right)\mathrm{U}_i^k - \frac{p\tau}{h^2}\mathrm{U}_{i+1}^k = \mathrm{U}_i^{k-1} + \tau f(P_i^k)}_{\text{soustava rovnic pro } k\text{-tou časovou vrstvu, } k \geq 1}$$

Pro $t = 0$:
$\mathbf{U}_i^0 = \varphi(x_i)$
$x = a$: $\mathbf{U}_0^k = \alpha(t_k)$
$x = b$: $\mathbf{U}_n^k = \beta(t_k)$

Implicitní schéma

soustava rovnic pro časovou vrstvu **k**:

$$-\frac{p\tau}{h^2}\mathbf{U}_{i-1}^{k} + \left(1 + 2\frac{p\tau}{h^2}\right)\mathbf{U}_i^{k} - \frac{p\tau}{h^2}\mathbf{U}_{i+1}^{k} = \mathbf{U}_i^{k-1} + \tau f(x_i,\ \ t^k)$$

$k = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$

Pro $t = 0 : \mathbf{U}_i^0 = \varphi(x_i), \quad x = a : \ \mathbf{U}_0^k = \alpha(t_k), \quad x = b : \ \mathbf{U}_n^k = \beta(t_k)$

nepodmíněně stabilní

chyba $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$

Příklad

1. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla:

v oblasti $\Omega = \{[x,t]: x \in (-1, 1), t>0\}$: $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x - t$$

s počáteční a okrajovou podmínkou: $$\begin{cases} u(x,0) = x^2 & x \in \langle -1,1 \rangle \\ u(-1,t) = 1+t & t \geq 0 \\ u(1,t) = 1-t & t \geq 0 \end{cases}$$

- Volíme $h = 0.5,\ \tau = 0.2$. Explicitní schéma nebude stabilní.
- Hodnoty v nulté časové vrstvě $\mathbf{U_i^0}$ určíme z počáteční podmínky: $\mathbf{U_i^0} = x_i^2$
- Sestavíme soustavu rovnic pro určení $\mathbf{U_i^1}$ v první časové vrstvě:

$$\begin{pmatrix} 2.6 & -0.8 & 0 \\ -0.8 & 2.6 & -0.8 \\ 0 & -0.8 & 2.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0.25 - 0.24 + 0.48 \\ 0 - 0.04 \\ 0.25 + 0.16 + 1.12 \end{matrix} = \begin{matrix} 0.49 \\ -0.04 \\ 1.53 \end{matrix}$$

Crankovo-Nicolsonové schéma

Implicitní schéma je vždy stabilní, ale s větším časovým krokem se zvětšuje diskretizační chyba. Chyba implicitního i explicitního schémato je $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$, tj. úměrná první mocnině τ, protože obě metody jsou nesymetrické v čase.
Tuto asymetrii odstraňuje metoda Cranka-Nicolsonové, která používá místo prostorové derivace v čase t^k (explicitní) nebo v čase t^{k+1} (implicitní)

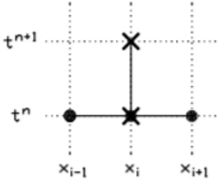
průměr z obou možností:

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = \mathbf{p}\frac{1}{2}\left[\frac{U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}}{h^2} + \frac{U_{i-1}^{k} - 2U_i^{k} + U_{i+1}^{k}}{h^2}\right]$$

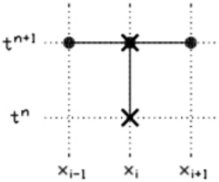
Upravíme (označíme $\sigma = \frac{\mathbf{p}\tau}{h^2}$), U^{k+1} na levou, U^k na pravou stranu.

$$-\frac{\sigma}{2}U_{i-1}^{k+1} + (1+\sigma)U_i^{k+1} - \frac{\sigma}{2}U_{i+1}^{k+1} = \frac{\sigma}{2}\left(U_{i-1}^{k} - 2U_i^{k} + U_{i+1}^{k}\right) + U_i^k$$

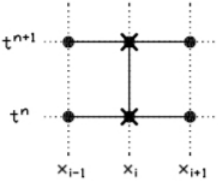
Tato metoda je **nepodmíněně stabilní, chyba $\mathcal{O}(h^2 + \tau^2)$**



explicitni



implicitni



Crank-Nicholsonovo