Norma matice (vektoru)

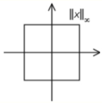
Norma je **funkce**, která každé matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ přiřazuje kladné reálné číslo $\|A\|$, které splňuje následující vlastnosti:

1. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$,
2. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ pro libovolné matice A, B téhož rozměru),
3. $\|A\| \geq 0$,
   $\|A\| = 0$ právě když A je nulová matice (obsahuje samé nuly).
4. Pokud se jedná o čtvercové matice, lze požadovat další vlastnost:
   $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ pro libovolné matice A, B téhož rozměru.

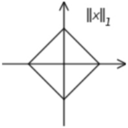
Příklady norem

- řádková norma $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$,
- sloupcová norma $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{i,j}|$
- euklidovská norma $\|A\|_E = \sqrt{\sum\limits_{i,j} |a_{i,j}|^2}$

jednotková kružnice v normě:



$\max\{|x_1|, |x_2|\} = 1$



$|x_1| + |x_2| = 1$

Spektrum a spektrální poloměr matice

- spektrum σ čtvercové matice A
  $\sigma(A)$ je *množina všech vlastních čísel* $\{\lambda_i\}$;
- spektrální poloměr (ρ) čtvercové matice A
  $$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i|\}$$
- **Věta.** Pro každou čtvercovou matici A a její libovolnou normu platí:
  $$\rho(A) \leq \|A\|$$

Důkaz:
Nechť λ je některé z vlastních čísel matice A a x příslušný vlastní vektor, takže $Ax = \lambda x$. Potom z vlastností (2 a 4) normy dostaneme:

$$|\lambda|\|x\| \underbrace{=}_{1} \|\lambda x\| = \|Ax\| \underbrace{\leq}_{4} \|A\|\|x\|$$

vlastní vektor x je nenulový vektor, proto platí $|\lambda| \leq \|A\|$ pro každé vlastní číslo λ, tedy i pro $\rho(A) = \max_i\{\lambda_i\} \leq \|A\|$.

Pozdrav z Matlabu

- výpočet normy

```
norm( X, Inf ) pro řádkovou normu
norm( X, 1 )   pro sloupcovou normu
norm( X,'fro') pro výpočet sqrt(sum(sum(X.^2)))
```

  POZOR,

```
norm(X, 2)  počítá hodnotu sqrt(max(eig(X'*X)))
norm(X)     počítá totéž jako norm(X, 2)
```

- výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

```
[vl_V, vl_C] = eig(A)
```

  výsledkem jsou 2 matice:
  `vl_V` obsahuje po sloupcích vlastní vektory matice A
  `vl_C` je diagonální matice, na diagonále jsou vl. čísla matice A
  vl. číslu v řádku (sloupci) i odpovídá vl. vektor **ve sloupci** i.

```
v = eig(A)  v obsahuje pouze vlastní čísla matice A
```

- spektrální poloměr matice A

```
rho = max(abs(eig(A)))
```

Příklady

Pro vektory

- $\vec{x} = (1; 0; 2)^T, \vec{y} = (0; 5; 3)^T$
- $\vec{x} = (1; 2; 3)^T, \vec{y} = (3; 2; 1)^T$

určete

1. $\|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty$
2. $\|\vec{x} - \vec{y}\|_1$
3. $\|\vec{x} - \vec{y}\|_E$

Řešení. Určíme $\vec{v} = \vec{x} - \vec{y}$ (po složkách)
$\vec{v_1} = (1 - 0;\ 0 - 5;\ 2 - 3)^T = (1;\ -5;\ -1)^T$
$\vec{v_2} = (1 - 3;\ 2 - 2;\ 3 - 1)^T = (-2;\ 0;\ 2)^T$
Určíme normy

1. $\|\vec{v_1}\|_\infty = \max\{1; |-5|; |-1|\} = 5,\ \ \|\vec{v_2}\|_\infty = \max\{|-2|; 0; 2\} = 2$
2. $\|\vec{v_1}\|_1 = 1 + |-5| + |-1| = 7,\ \ \|\vec{v_2}\|_1 = |-2| + 0 + 2 = 4$
3. $\|\vec{v_1}\|_E = \sqrt{1^2 + |-5|^2 + |-1|^2} = \sqrt{27},\ \ \|\vec{v_2}\|_E = \sqrt{8}$

Příklady

Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

určete

1. $\|\mathbf{A}\|_\infty$, $\|\mathbf{A}\|_1$,$\|\mathbf{A}\|_E$, $\|\mathbf{B}\|_\infty$, $\|\mathbf{B}\|_1$,$\|\mathbf{B}\|_E$, $\|\mathbf{C}\|_\infty$, $\|\mathbf{C}\|_1$,$\|\mathbf{C}\|_E$
2. $\sigma(\mathbf{A}), \rho(\mathbf{A})$, $\sigma(\mathbf{B}), \rho(\mathbf{B})$, $\sigma(\mathbf{C}), \rho(\mathbf{C})$

Řešení pro matici **C**

$\|\mathbf{C}\|_\infty = \max\{(2+1+1);\ 1;\ 2+1\} = \max\{4;\ 1;\ 3\} = 4$

$\|\mathbf{C}\|_1 = \max\{2;\ 4;\ 2\} = 4$

$\|\mathbf{C}\|_E = \sqrt{4+1+1+1+4+1} = \sqrt{12}$

vlastní čísla: $\sigma(\mathbf{C}) = \{2, -1, 1\}$, $\rho(\mathbf{C}) = 2$.