

Parciální diferenciální rovnice

Rovnice vedení tepla

Cvičení 10.

15. dubna 2020

Rovnice vedení tepla

- Úloha

V oblasti $\Omega=(a, b) \times (0, T)$, kde $a, b, T \in \mathbb{R}$, $a < b$, $T > 0$ je dána $\frac{\partial u}{\partial t} = p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$, $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$

s počáteční podmínkou ($t=0$, $x \in (a, b)$)

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

a okrajovými podmínkami ($x=a$, $x=b$, $t \geq 0$)

$$u(a, t) = \alpha(t), u(b, t) = \beta(t)$$

- Postup řešení

- Ověření **podmínek souhlasu**, tj. shody hodnot $u(x, t)$ daných počáteční a okrajovou podmínkou v bodech $[x=a, t=0]$ a $[x=b, t=0]$: $\varphi(a) = \alpha(0)$ a $\varphi(b) = \beta(0)$
- Volba časového prostorového **kroku h** a časového **kroku τ** a ověření **stability numerické metody**:
explicitní - stabilní při $\frac{p\tau}{h^2} \leq 0.5$, implicitní - stabilní $\forall \tau, h$ (nepodmíněně)
- Volba **numerické metody**: **explicitní** nebo **implicitní metoda sítí**.
- Se zvolenými kroky h, τ **vytvoříme síť**: uzly sítě jsou body $P_i^{(k)} = [x_i, t_k]$, $x_i = a + ih$, $t_k = \tau k$.
Množina uzlů $P_i^{(k)}$ tvoří při pevném k tzv. **k-tou časovou vrstvu**.
Numerické řešení jsou vypočítané hodnoty $U_i^{(k)}$ přibližné hodnoty $u(P_i^{(k)})$ v uzlech sítě.
Hodnoty $U_i^{(k)}$ určujeme ve směru rostoucího t , po jednotlivých časových vrstvách.

Nahrazení derivací v jednom uzlu: $\mathbf{P}_i^k = \mathbf{P}[x_i, t^k]$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

- druhou derivaci:

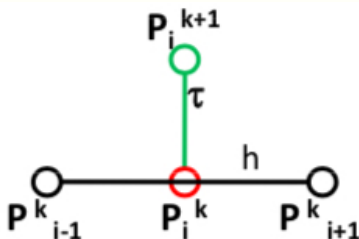
"centrálně"

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(P_{i-1}^k) - 2u(P_i^k) + u(P_{i+1}^k))}{h^2} + O(h^2)$$

- první derivaci:

"dopředně"

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(P_i^{k+1}) - u(P_i^k)}{\tau} + O(\tau)$$



Dosazením do rovnice dostaneme **explicitní schéma**:

$$\frac{u(P_i^{k+1}) - u(P_i^k)}{\tau} = p \frac{u(P_{i-1}^k) - 2u(P_i^k) + u(P_{i+1}^k))}{h^2} + f(P_i^k)$$

$$U_i^{k+1} = \underbrace{\frac{p\tau}{h^2} U_{i-1}^k + (1 - 2\frac{p\tau}{h^2}) U_i^k + \frac{p\tau}{h^2} U_{i+1}^k + \tau f(P_i^k)}_{\text{rovnice pro uzel } P_i^{k+1}, \text{ pro } i=1, \dots, n-1, k \geq 0}$$

Pro $t = 0$:

$$\mathbf{U}_i^0 = \varphi(x_i)$$

$$x = a : \mathbf{U}_0^k = \alpha(t_k)$$

$$x = b : \mathbf{U}_n^k = \beta(t_k)$$

Explicitní schéma

Rovnice pro výpočet hodnoty $\mathbf{U}_i^{k+1}$:

$$\mathbf{U}_i^{k+1} = \frac{p\tau}{h^2} \mathbf{U}_{i-1}^k + \left(1 - 2\frac{p\tau}{h^2}\right) \mathbf{U}_i^k + \frac{p\tau}{h^2} \mathbf{U}_{i+1}^k + \tau f(x_i, t^k)$$

$$k = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\text{Pro } t = 0 : \mathbf{U}_i^0 = \varphi(x_i), \quad x = a : \mathbf{U}_0^k = \alpha(t_k), \quad x = b : \mathbf{U}_n^k = \beta(t_k)$$

stabilní pro $\frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$
chyba $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$

Příklad

1. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla:

v oblasti $\Omega = \{[x,t]: x \in (-1, 1), t > 0\}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x - t$$

s počáteční a okrajovou podmínkou:

$$\begin{cases} u(x,0) = x^2 & x \in (-1,1) \\ u(-1,t) = 1+t & t \geq 0 \\ u(1,t) = 1-t & t \geq 0 \end{cases}$$

- Ověření podmínek souhlasu:

$x = -1, t = 0$:

$$u(-1,0) = (-1)^2$$

$$u(-1,0) = 1 + 0$$

$x = 1, t = 0$:

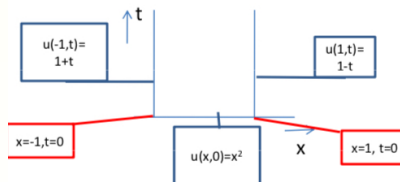
$$u(1,0) = 1^2$$

$$u(1,0) = 1 - 0$$

- Volba kroků h, τ

Volíme $h = 0.5$ a určíme maximální τ tak, aby explicitní schéma bylo stabilní a bod $[0, 0.2]$ byl uzlem sítě.

$$\tau \leq 0.125 \Rightarrow \tau_{\max} = 0.1$$



Výpočet hodnot užitím explicitního schématu

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
	-1	-0.5	0	0.5	1

- ❶ Nultá časová vrstva: $t = 0$: $U_i^0 = x_i^2$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
	-1	-0.5	0	0.5	1
U^0	1	0.25	0	0.25	1

- ❷ První časová vrstva: $t = \tau = 0.1$, $\frac{p\tau}{h^2} = 0.4$:

$$\mathbf{U}_i^1 = 0.4 \cdot \mathbf{U}_{i-1}^0 + (1 - 2 \cdot 0.4) \cdot \mathbf{U}_{i-1}^0 + 0.4 \cdot \mathbf{U}_{i-1}^0 + 0.1 \cdot 2x_i$$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
	-1	-0.5	0	0.5	1
U^0	1	0.25	0	0.25	1
U^1	1+0.1	0.35	0.2	0.55	1-0.1

- ❸ Druhá časová vrstva: $t = 2\tau = 0.2$:

$$\mathbf{U}_i^2 = 0.4 \cdot \mathbf{U}_{i-1}^1 + (1 - 2 \cdot 0.4) \cdot \mathbf{U}_{i-1}^1 + 0.4 \cdot \mathbf{U}_{i-1}^1 + 0.1 \cdot (2x_i - 0.1)$$

$$u(0, 0.2) \doteq \mathbf{U}_2^2 = 0.39$$

Nahrazení derivací v jednom uzlu: $\mathbf{P}_i^k = \mathbf{P}[x_i, t^k]$

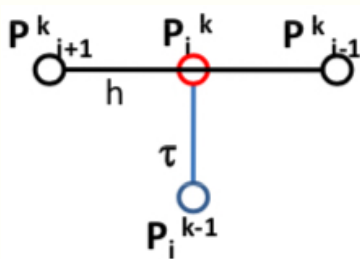
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

- druhou derivaci:
"centrálně"

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(P_{i-1}^k) - 2u(P_i^k) + u(P_{i+1}^k))}{h^2} + O(h^2)$$

- první derivaci: "zpětně"

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(P_i^k) - u(P_i^{k-1}))}{\tau} + O(\tau)$$



Dosažením do rovnice dostaneme **implicitní schéma**:

$$\underbrace{-\frac{P\tau}{h^2}U_{i-1}^k + (1 + 2\frac{P\tau}{h^2})U_i^k - \frac{P\tau}{h^2}U_{i+1}^k}_{\text{soustava rovnic pro } k\text{-tlačasovou vrstvu, } k \geq 1} = U_i^{k-1} + \tau f(P_i^k)$$

Pro $t = 0$:

$$\mathbf{U}_i^0 = \varphi(x_i)$$

$$x = a : \mathbf{U}_0^k = \alpha(t_k)$$

$$x = b : \mathbf{U}_n^k = \beta(t_k)$$

Implicitní schéma

soustava rovnic pro časovou vrstvu **k**:

$$-\frac{p\tau}{h^2}\mathbf{U}_{i-1}^k + \left(1 + 2\frac{p\tau}{h^2}\right)\mathbf{U}_i^k - \frac{p\tau}{h^2}\mathbf{U}_{i+1}^k = \mathbf{U}_i^{k-1} + \tau f(x_i, t^k)$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\text{Pro } t = 0 : \mathbf{U}_i^0 = \varphi(x_i), \quad x = a : \mathbf{U}_0^k = \alpha(t_k), \quad x = b : \mathbf{U}_n^k = \beta(t_k)$$

nepodmíněně stabilní

chyba $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$

Příklad

1. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla:

v oblasti $\Omega = \{[x,t]: x \in (-1, 1), t > 0\}$:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x - t$$

s počáteční a okrajovou podmínkou:
$$\begin{cases} u(x,0) = x^2 & x \in (-1,1) \\ u(-1,t) = 1+t & t \geq 0 \\ u(1,t) = 1-t & t \geq 0 \end{cases}$$

- Volíme $h = 0.5$, $\tau = 0.2$. Explicitní schéma nebude stabilní.
- Hodnoty v nulté časové vrstvě $\mathbf{U}_i^0$ určíme z počáteční podmínky: $\mathbf{U}_i^0 = x_i^2$
- Sestavíme soustavu rovnic pro určení $\mathbf{U}_i^1$ v první časové vrstvě:

$$\begin{pmatrix} 2.6 & -0.8 & 0 \\ -0.8 & 2.6 & -0.8 \\ 0 & -0.8 & 2.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 - 0.24 + 0.48 & 0.49 \\ 0 & -0.04 \\ 0.25 + 0.16 + 1.12 & 1.53 \end{pmatrix}$$