Kuželosečky a kvadratické plochy

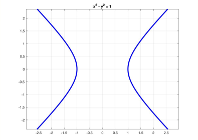
Cvičení 1.

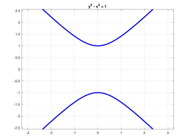
10. února 2020

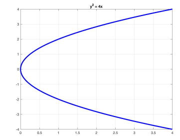
Obsah

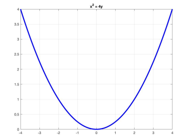
Kanonické a parametrické rovnice regulárních kuželoseček

kuželosečka	kanonická rovnice	parametrické rovnice
• kružnice	$x^2 + y^2 = r^2$	$x = r\cos t$ $y = r\sin t$ $t \in \langle 0,\ 2\pi)$
• elipsa	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$x = a\cos t$ $y = b\sin t$ $t \in \langle 0,\ 2\pi)$
• hyperbola	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$x = \dfrac{a}{\cos t}$ $y = b\ \mathrm{tg}\ t$ $t \neq \frac{\pi}{2},\ \ t \neq \frac{3}{2}\pi$
• parabola	$y^2 = 2px$	$x = \frac{1}{2p}t^2$ $y = t$ $t \in \mathbb{R}$



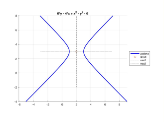




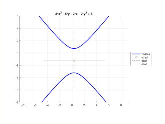


Příklady: regulární kuželosečky, uvedení na kanonický tvar

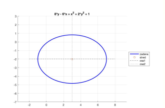
1. $y^2 - 2y - 10x = 0$,
2. $x^2 + 6x + y^2 + 8y = 0$
3. $x^2 - 4x - y^2 + 6y - 6 = 0$,
4. $x^2 - 6x + 2y^2 + 8y + 1 = 0$,
5. $3x^2 - 2x - 2y^2 - 5y + 5 = 0$,
6. $3x^2 - 2x + 5y - 6 = 0$,



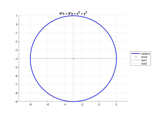
a)



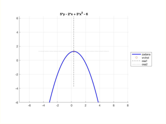
b)



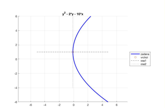
c)



d)



e)



f)

Rovnice

Kuželosečka nebo též algebraická křivka 2. stupně je množina bodů X v rovině, jejichž souřadnice $[x, y]$ vyhovují v nějaké lineární soustavě souřadnic rovnici

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

kde a_{ij} jsou reálná čísla ($i, j = 1, 2, 3$) a $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$.
Pokud by $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, potom by rovnice byla lineární a vyjadřovala by přímku.

Vyjádření rovnice kuželosečky s dvojkami u některých koeficientů je čistě technické a umožňuje nám vyjádřit rovnici kuželosečky maticově:

$$(x\ y\ 1)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\mathcal{K}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

vhodnou volbou kartézské soustavy souřadnic, pomocí otočení a posunutí, zjednodušíme rovnici na tzv. **kanonický tvar**:

$$X \cdot \underbrace{P \cdot \mathcal{K} \cdot P^T}_{matice\ A} \cdot X^T \ = \ 0$$

Klasifikace kuželoseček

Označíme Δ determinant matice $\mathcal{K}$ a $\delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

kuželosečky

regulární: $\Delta \neq 0$

- elipsa
- parabola
- hyperbola

neregulární: $\Delta = 0$

- 2 různoběžky
- 2 rovnoběžky
- 1 bod
- prázdná množina

středové: $\delta \neq 0$

nestředové: $\delta = 0$

soustava rovnic $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix}$

má jediné řešení, souřadnice středu $[m, n] = [x, y]$

má buď ∞ řešení (přímka), nebo řešení nemá.

Uvedení kuželosečky na kanonický tvar

$\boxed{\text{Určíme determinanty: "velký"}(\Delta) \text{ a "malý"}(\delta).}$

Určíme vlastní čísla λ_1, λ_2 a **jednotkové** vlastní vektory $u = (u_x, u_y), v = (v_x, v_y)$ matice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Regulární středové kuželosečky

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta}{\delta} \end{pmatrix},$$

matici P tvoří **jednotkové** vlastní vektory $\vec{u}, \vec{v}$ a souřadnice středu m, n

$$P = \begin{pmatrix} u_x & v_x & 0 \\ u_y & v_y & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$$

Kanonická rovnice regulární středové kuželosečky je

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \quad (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0).$$

Střed kuželosečky $[m, n]$ je počátek nové soustavy souřadnic.

Osy kuželosečky tvoří osy nové soustavy souřadnic.
Jsou ve směrech určených vlastními vektory a jejich rovnice jsou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \; p, q \in \mathbb{R}$$

Elipsa

λ_1, λ_2 mají stejná znaménka a $\dfrac{\Delta}{\delta}$ má opačné znaménko než $\lambda_{1,2}$.

Příklad: $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18x - 12y + 15 = 0$

- Matice a determinanty:

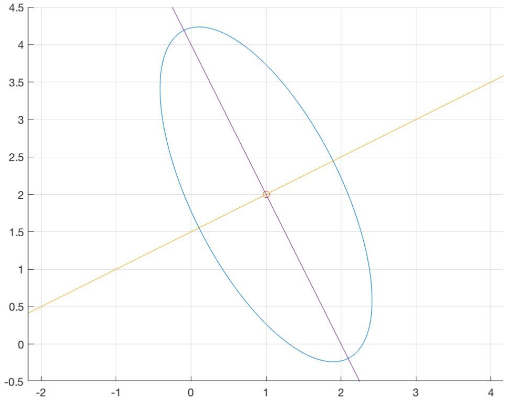
$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & -6 \\ -9 & -6 & 15 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{rcr} \Delta & = & -36, \\ \delta & = & 6 \\ \frac{\Delta}{\delta} & = & -6 \end{array}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice k:

$$\lambda_1 = 1,\ \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ -2)^T,\ \lambda_2 = 6,\ \vec{v} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,\ 1)^T$$

- Střed: $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow S = [1,\ 2]$
- Osy: $x - 2y + 3 = 0,\ 2x + y - 4 = 0$
- Kanonická rovnice: $x^2 + 6y^2 - 6 = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{6} + y^2 = 1$
- $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -9 \\ 2 & 2 & -6 \\ -9 & -6 & 15 \end{pmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^T}$$

Výsledek



Imaginární elipsa

λ_1, λ_2 mají stejná znaménka a Δ/δ **stejné** znaménko jako $\lambda_{1,2}$:

jedná se o prázdnou množinu bodů v $\mathbb{E}_2$.

Příklad: $x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$

- Matice a determinanty:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{rcr} \Delta & = & 0.5 \\ \delta & = & 0.75 \\ \frac{\Delta}{\delta} & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice k:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \ \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \ -1)^T, \ \lambda_2 = \frac{3}{2}, \ \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \ 1)^T$$

- Střed: $\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \left[-\frac{2}{3}, \ -\frac{2}{3}\right]$
- Osy: $x + y + \frac{4}{3} = 0, \ x - y = 0$
- Kanonická rovnice: $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2}{2} + \frac{9y^2}{2} = -1$
- $\underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^T}$

Hyperbola

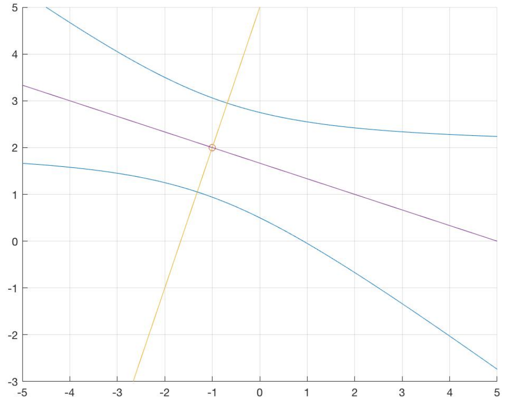
λ_1, λ_2 mají různá znaménka.

Příklad $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$

- Matice a determinanty:
$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{rcr} \Delta & = & 81, \\ \delta & = & -9 \\ \frac{\Delta}{\delta} & = & -9 \end{array}$$
- Vlastní čísla a vlastní vektory matice k:
$$\lambda_1 = 9,\ \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,\ 3)^T,\ \lambda_2 = -1,\ \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,\ 1)^T$$
- Střed: $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow S = [-1,\ 2]$
- Osy: $3x - y + 5 = 0,\ x + 3y - 5 = 0$
- Kanonická rovnice: $9x^2 - y^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{pmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} & -1 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^T}$$

Výsledek



Regulární nestředové kuželosečky

Právě jedno z vlastních čísel je nulové.

Označíme

$\lambda_1 \neq 0$, u - **jednotkový** vlastní vektor odpovídající tomuto vl. č.,

$\lambda_2 = 0$, v - **jednotkový** vlastní vektor odpovídající tomuto vl. č.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 p \\ 0 & \lambda_1 p & 0 \end{pmatrix},$$

matici P tvoří **jednotkové** vlastní vektory $\vec{u}, \vec{v}$ a souřadnice **vrcholu** m, n

$$P = \begin{pmatrix} u_x & v_x & 0 \\ u_y & v_y & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$$

Kanonická rovnice regulární nestředové kuželosečky je

$$\lambda_1 x^2 + 2py = 0, \quad (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0),$$

$$p = \frac{(a_{13}, a_{23})(v_x, v_y)}{\lambda_1}, \quad \text{vrchol } [m, n] = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p \\ \frac{\lambda_1 p^2 - a_{3,3}}{2\lambda_1 p} \end{pmatrix}$$

Osy kuželosečky tvoří osy nové soustavy souřadnic.

Jsou ve směrech určených vlastními vektory a jejich rovnice jsou

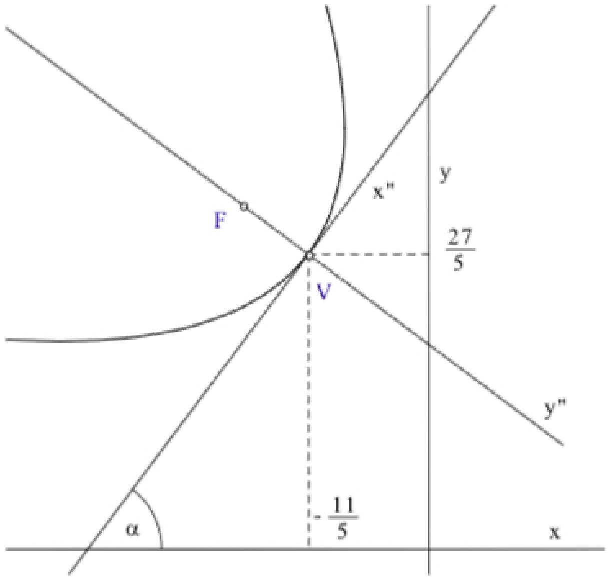
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \; p, q \in \mathbb{R}$$

Parabola

Příklad $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 30x - 210y + 975 = 0$

- Matice a determinanty:
  $$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 12 & 16 & -105 \\ 15 & -105 & 975 \end{pmatrix}, \ k = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \Delta = -3^2 5^6, \\ \delta = 0 \end{array}$$
- Vlastní čísla a vlastní vektory matice k:
  $\lambda_1 = 25,\ \vec{u} = \frac{1}{5}(3,\ 4)^T,\ \lambda_2 = 0,\ \vec{v} = \frac{1}{5}(-4,\ 3)^T$
- $p = \dfrac{(15,\ -105)(-4,\ 3)\frac{1}{5}}{25} = -3$
- Vrchol: $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \left[-\frac{11}{5},\ \frac{27}{5}\right]$
- Osy: $3x + 4y - 15 = 0$ (osa paraboly), $4x + 3y - 25 = 0$
- Kanonická rovnice: $x'^2 - 6y' = 0$
- Transformační rovnice mezi původní (x, y) a novou (x', y') soustavou souřadnic:
  $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -11 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Výsledek



Neregulární kuželosečky

- **neregulární středové**: $\Delta = 0,\ \delta \neq 0$
  - $\delta < 0$ $(\lambda_1 \lambda_2 < 0)$
    2 různoběžné přímky,
    směrové vektory odpovídají vlastním vektorům,
    průsečík - ve středu
  - $\delta > 0$ $(\lambda_1 \lambda_2 > 0)$
    jediný bod (střed)
- **neregulární nestředové** $\Delta = 0,\ \delta = 0$ (např. $a_{11} \neq 0,\ \lambda_1 \neq 0$)
  - $a_{11} a_{33} - a_{13}^2 < 0$
    2 rovnoběžné přímky

    $$\begin{array}{ll} p: & a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}} \\ q: & a_{11}x + a_{12}y + a_{13} - \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}} \end{array}$$
  - $a_{11} a_{33} - a_{13}^2 = 0$
    jedna (dvojnásobná) přímka $p: a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$
  - $a_{11} a_{33} - a_{13}^2 > 0$
    prázdná množina

Příklad (neregulární středová)

$$6x^2 - xy - 2y^2 + 5x + 6y - 4 = 0$$

- Matice a determinanty:

  $$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & 3 \\ \frac{5}{2} & 3 & -4 \end{pmatrix}, \ k = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \Delta = 0, \\ \delta = -\frac{49}{4} \end{array}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice k:

  $$\lambda_1 = 2 + \frac{\sqrt{65}}{2}, \ \vec{u} = \frac{1}{|u|}(1, \ \sqrt{65} - 8)^T,$$

  $$\lambda_2 = 2 + \frac{\sqrt{65}}{2}, \ \vec{v} = \frac{1}{|v|}(1, \ -16 - \sqrt{65})^T$$

- Střed: $S = \left[-\frac{2}{7}, \ \frac{11}{7}\right]$
- 2 různoběžky

  $(3x' - 2y')(2x' + y') = 0, \quad x = x' - \frac{2}{7}, y = y' + \frac{11}{7}$

  $(3x - 2y + 4)(2x + y - 1) = 0$ (z rozkladu rovnice)

Příklad (neregulární středová)

$3x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$

- Determinanty: $\Delta = 0,\ \delta = 5$
- Střed: $S = [1,\ 1]$

Kuželosečce vyhovuje jediný bod, její střed.

Příklad (neregulární nestředová)

$9x^2 - 30xy + 25y^2 + 12x - 20y + 4 = 0$

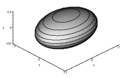
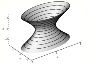
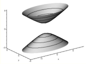
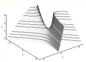
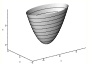
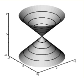
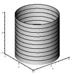
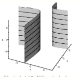
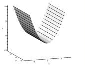
- Determinanty: $\Delta = 0,\ \delta = 0$
- Ze soustavy rovnic pro určení středu zjistíme, že má ∞ řešení, tj. přímku.

  $\begin{pmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 9x - 15y = -6, \text{tj.} \\ 3x - 5y = -2 \end{matrix}$

  Tato přímka náleží kuželosečce, tj jedná se o dvojnásobnou přímku.

Kvadratické plochy

Kvadratické plochy v kanonickém tvaru

1. **Elipsoid** $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ 
2. **Hyperboloid**
   jednodílný $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ 
   dvojdílný  $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$
3. **Paraboloid**
   hyperbolický $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 2z$$ 
   eliptický  $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm 2z$$
4. **Kuželová plocha** $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$ 
5. **Válcová plocha**
   eliptická $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ 
   hyperbolická $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ 
   parabolická $$\frac{x^2}{a^2}=\pm 2kz$$ 

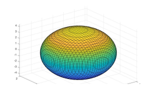
Příklady

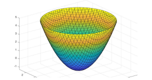
1. $x^2+2y^2+z^2-18=0$
2. $x^2-5y+z^2=0$
3. $x^2-9y^2-z^2+36=0$
4. $x^2-4y^2-z=0$
5. $x^2+y^2-z^2=0$
6. $2x^2+y^2-2z^2=0$
7. $x^2+y^2-z^2+1=0$
8. $4x^2+y^2-z^2-1=0$
9. $x^2+4y^2+z^2-4=0$
10. $2x^2-y^2-z^2-4=0$

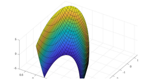
1. Kterými rovnicemi je zadaný elipsoid?
2. Kterými rovnicemi je zadaný jednodílný hyperboloid?
3. Kterými rovnicemi je zadaný dvojdílný hyperboloid?
4. Kterými rovnicemi je zadaný hyperbolický paraboloid?
5. Kterými rovnicemi je zadaný eliptický paraboloid?
6. Kterými rovnicemi je zadaná kuželová plocha?
7. Kterými rovnicemi je zadaná válcová plocha? Jaká?

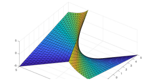
Příklady

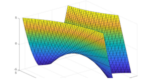
1. $x^2 - 2x + y^2 - z = 0$
2. $x^2 + y^2 - z^2 + 8z - 16 = 0$
3. $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 12 = 0$
4. $3x - 2y - yz = 0$
5. $x^2 + 12y^2 - 6xy + 4x - z = 0$
6. $x^2 + xy - 3x - y - z = 0$

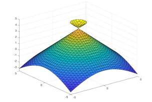
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

Příklady

1. $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $z = \sqrt{x^2 - 9y^2 - 36}$
3. $z = \sqrt{18 - x^2 - 2y^2}$
4. $z = -\sqrt{5y - x^2}$
5. $z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$
6. $z = \sqrt{y - x^2}$
7. $z = \sqrt{9 + x^2 + y^2}$

Kvadratické plochy

rovnice kvadratické plochy

$$\begin{array}{rrrr} a_{11}x^2 & +2a_{12}xy & +2a_{13}xz & +2a_{14}x+ \\ & +a_{22}y^2 & +2a_{23}yz & +2a_{24}y+ \\ & & +a_{33}z^2 & +2a_{34}z+ \\ & & & +a_{44} = \quad 0 \end{array}$$

maticový zápis

$$(x\ y\ z\ 1)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}}_{\mathcal{K}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

označení:

determinant kvadratické plochy: $\Delta = \det \mathcal{K}$,

"malý determinant": $\delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Klasifikace kvadratických ploch

regulární: $\Delta \neq 0$

- elipsoidy
- paraboloidy
- hyperboloidy

neregulární: $\Delta = 0$

- kuželové plochy
- válcové plochy
- rovnoběžné roviny
- různoběžné roviny
- přímka
- 1 bod
- prázdná množina

---

středové: $\delta \neq 0$ | **nestředové:** $\delta = 0$

soustava rovnic $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{14} \\ -a_{24} \\ -a_{34} \end{pmatrix}$$

má **jediné** řešení, souřadnice středu $[m, n, o] = [x, y, z]$

má buď ∞ řešení, nebo **řešení nemá**.

Základní výpočty

Sestavíme matice $\mathcal{K}$, k:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Určíme determinanty: "velký" ($\Delta = \det \mathcal{K}$) a "malý" ($\delta = \det k$).

Určíme vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a **jednotkové** vlastní vektory $u = (u_x, u_y, u_z), v = (v_x, v_y, v_z), w = (w_x, w_y, w_z)$ matice k.

Určíme hodnost matice $\mathcal{K}$ ($h(\mathcal{K})$).

Určení typu kvadratické plochy

- $\Delta \neq 0, \delta \neq 0$: regulární středová $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0)$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mají stejná znaménka

elipsoid

znaménko $\dfrac{\Delta}{\delta}$

opačné λ_i — trojosý

stejné jako λ_i — imaginární

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nemají stejná znaménka

hyperboloid

např. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$

$\dfrac{\Delta}{\delta} > 0$ — dvojdílný

$\dfrac{\Delta}{\delta} < 0$ — jednodílný

- $\Delta \neq 0, \delta = 0$: regulární nestředová (jedno vl. č., např. λ_3, je nulové)
  paraboloid: $\lambda_1\lambda_2 > 0$ – eliptický $\lambda_1\lambda_2 < 0$ – hyperbolický
- $\Delta = 0, \delta \neq 0$: neregulární středová $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0, \dfrac{\Delta}{\delta} = 0)$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mají stejná znaménka — jeden bod $[0, 0, 0]$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nemají stejná znaménka — kuželová plocha

- $\Delta = 0, \delta = 0$: neregulární nestředová
  hodnost matice $\mathcal{K}$ je
  - 3: válcová plocha – eliptická, hyperbolická, parabolická (nebo žádný reálný bod)
  - 2: přímka, dvojice rovin (nebo žádný reálný bod)
  - 1: dvojnásobná rovina

Regulární středové kvadriky ($\Delta \neq 0,\ \delta \neq 0$)

Každou středovou kvadriku lze převést vhodnou volbou kartézské soustavy souřadnic na kanonický tvar:

$$(x\ y\ z\ 1)\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{\delta} \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \quad (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0).$$

Střed kvadriky $S = [m, n, o]$ je počátek nové soustavy souřadnic.
Souřadnice středu určíme jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \\ o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{14} \\ -a_{24} \\ -a_{34} \end{pmatrix}$$

Osy kvadriky tvoří osy nové soustavy souřadnic.
Jsou ve směrech určených vlastními vektory a jejich rovnice jsou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ o \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix},\ X = S + q\vec{v},\ X = S + r\vec{w}\ \ p, q, r \in \mathbb{R}$$

Kvadriky eliptického typu

Všechna vlastní čísla mají **stejná znaménka**, např. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0.$
Pokud $\frac{\Delta}{\delta}$ má opačné znaménko, dostáváme rovnici v kanonickém tvaru:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \left(a^2 = -\tfrac{\Delta}{\lambda_1\delta},\ b^2 = -\tfrac{\Delta}{\lambda_2\delta},\ c^2 = -\tfrac{\Delta}{\lambda_3\delta}\right)$$

Kvadratická plocha je **trojosý elipsoid**

Pokud $\frac{\Delta}{\delta}$ má stejné znaménko jako λ_i, dostáváme rovnici v kanonickém tvaru:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \qquad \left(a^2 = -\tfrac{\Delta}{\lambda_1\delta},\ b^2 = -\tfrac{\Delta}{\lambda_2\delta},\ c^2 = -\tfrac{\Delta}{\lambda_3\delta}\right)$$

množina bodů je **prázdná (imaginární elipsoid)**.

Příklad

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 22x + 24y + 2z + 30 = 0$$

- Matice a determinanty

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 & -11 \\ -2 & 6 & -2 & 12 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ -11 & 12 & 1 & 30 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{rcr} \Delta & = & -4 \cdot 3^5 \\ \delta & = & 2 \cdot 3^4 \\ \frac{\Delta}{\delta} & = & -6 \end{array}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory

$\lambda_1 = 3,\ \vec{u} = (1, 2, 2),\ \lambda_2 = 6,\ \vec{v} = (2, 1, -2),\ \lambda_3 = 9,\ \vec{w} = (-2, 2, -1)$

- Kanonická rovnice

$$(x, y, z, 1) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 6 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} + \frac{3z^2}{2} = 1$$

Kvadriky hyperbolického typu

Vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nemají stejná znaménka. Předpokládejme, že $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$. Jestliže $\dfrac{\Delta}{\delta} > 0$, potom dostaneme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

Kvadrika se nazývá **dvojdílný hyperboloid.**

Jestliže $\dfrac{\Delta}{\delta} < 0$, potom dostaneme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

Kvadrika se nazývá **jednodílný hyperboloid**.

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}, \; b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}, \; c^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_3 \delta}$$

Regulární nestředové kvadriky ($\Delta \neq 0,\ \delta = 0$) paraboloidy

Regulární nestředovou kvadriku, pro jejíž vlastní čísla platí $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$ a $\lambda_3 = 0$, lze převést vhodnou volbou kartézské soustavy souřadnic na kanonický tvar

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2Gz = 0,$$

kde $G = (a_{14}, a_{24}, a_{34}) \cdot \vec{w}$ a $\vec{w}$ je jednotkový vlastní vektor, odpovídající $\lambda_3 = 0$.
G je různé od nuly, jak plyne z determinantu Δ matice kvadriky

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & G & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 G^2$$

- vl. č. λ_1, λ_2 mají **stejná znaménka**, např. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ a $\lambda_3 = 0$.
  - $G < 0$: můžeme rovnici upravit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

  - $G > 0$: dostaneme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -2z.$$

eliptický paraboloid

- vl.č. λ_1, λ_2 mají **různá znaménka**, např. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ a $\lambda_3 = 0$.
  - $G < 0$: dostaneme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

  - $G > 0$: dostaneme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2z.$$

hyperbolický paraboloid

Příklad

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$$

- Matice a determinanty

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{ccc} \Delta & = & 16 \\ \delta & = & 0 \end{array}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory

$\lambda_1 = 7, \; \vec{u} = (4, 1, 2), \; \lambda_2 = -2, \; \vec{v} = (1, -2, -1), \; \lambda_3 = 0, \; \vec{w} = (1, 2, -3)$

- $G = (1, 2, 3) \cdot \dfrac{(1, -2, 3)}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = -\dfrac{4}{\sqrt{14}}$
- Kanonická rovnice

$$(x, y, z, 1) \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{14}} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 7x^2 - 2y^2 = \frac{8}{\sqrt{14}} z$$

- Osa: průnik rovin, odpovídajících nenulovým vl. vektorům, vrchol: průsečík osy a

$\mathcal{K} \; \vec{u} \Rightarrow \rho : \; (4, 1, 2, 0) \cdot \mathcal{K} \cdot (x, y, z, 1)^T = 0 \Rightarrow 28x + 7y + 14z + 12 = 0$

$\vec{v} \Rightarrow \sigma : \; (1, 2, -1, 0) \cdot \mathcal{K} \cdot (x, y, z, 1)^T = 0 \Rightarrow x - 2y - z + 3 = 0$

$V = \left[-\dfrac{617}{392}, -\dfrac{113}{196}, \dfrac{1011}{392} \right]$

Neregulární středové kvadriky ($\Delta = 0,\ \delta \neq 0$)

- Vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mají **stejná znaménka**.
  Potom dostaneme rovnici

  $$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

  které vyhovuje **jediný reálný bod** $[0,\ 0,\ 0]$.
- Vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ **nemají stejná znaménka**.
  Předpokládejme, že $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$.
  V tomto případě dostaneme rovnici

  $$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

  Kvadriku nazýváme **kuželová plocha**.

Neregulární nestředové kvadriky ($\Delta = 0, \delta = 0$)

1) Hodnost matice $\mathcal{K}$ je **tři**.

a) Jedno vl.č. je **nulové**, např.$\lambda_{1,2} \neq 0, \lambda_3 = 0$.

b) Jedno vl. č. je **nenulové**, např. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

a)Soustavě rovnic pro určení středu vyhovuje **přímka středů**.

Uvažujme matici kvadriky ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & G & 0 \end{pmatrix}$$

$N = (a_{14}, a_{24}, a_{24})X + a_{44}, N \neq 0 \qquad G \neq 0$

X je libovolný bod přímky středů

jedná se o válcovou plochu

a) $\lambda_1\lambda_2 > 0$ eliptickou $\quad \lambda_1\lambda_2 < 0$ hyperbolickou $\quad$ **b)** parabolickou

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = N \qquad \qquad \lambda_1 x^2 = -2Gz$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} = \pm 2pz$$

Neregulární nestředové kvadriky ($\Delta = 0, \delta = 0$)

2) Hodnost matice $\mathcal{K}$ je **dva**.

a) Jedno vl.č. je **nulové**, např. $\lambda_{1,2} \neq 0, \lambda_3 = 0$.

b) Jedno vl. č. je **nenulové**, např. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Uvažujme matici kvadriky ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$$

$\lambda_1\lambda_2 > 0$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ přímka

$\lambda_1\lambda_2 < 0$: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ 2 roviny

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H \end{pmatrix}, H \neq 0$$

$$\lambda_1 x^2 = H$$

$\lambda_1 H < 0$: $\dfrac{x^2}{a^2} = 1$ 2 roviny

$\lambda_1 H > 0$: $\dfrac{x^2}{a^2} = -1$ $\emptyset$

Neregulární nestředové kvadriky ($\Delta = 0, \delta = 0$)

3) Hodnost matice $\mathcal{K}$ je **jedna**.
Jedno vl. č. je **nenulové**,
např. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Matice kvadriky

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

odpovídá

$$\lambda_1 x^2 = 0$$

dvojnásobná rovina

Příklad

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4\sqrt{2}xy + 2yz + 6x + 2y(2\sqrt{2} - 1) - 6z - 9 = 0$$

- $\Delta = 0, \;\delta = 0 \Rightarrow$ neregulární nestředová
- Vlastní čísla a vl. vektory
  $\lambda_1 = 3, \vec{u} = (\sqrt{2}, 0, -4),$
  $\lambda_2 = 6, \vec{v} = (3\sqrt{2}, 3, 1),$
  $\lambda_3 = 0, \vec{w} = (2\sqrt{2}, -3, 1)$
- Hodnost matice $\mathcal{K}$ je 3.
- Matice kvadriky
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix}$$
- Přímka středů $X = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} - 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} t,$
  vybereme libovolný bod, např. $t = 1 \Rightarrow [m, n, o] = [-1, 0, 1]$
  $N = a_{14}m + a_{24}n + a_{34}o = -15$
- Kanonická rovnice $3x^2 + 6y^2 = 15$ eliptická válcová plocha

Příklad

$$8x^2 - 8y^2 - 3z^2 - 12xy + 10xz + 10yz - 2x + 14y - 10z - 3 = 0$$

- $\Delta = 0, \ \delta = 0 \Rightarrow$ neregulární nestředová
- 1 vlastní číslo nulové ($\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{609}}{2}$)
- přímka středů: $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{7}{10} \\ 1 \end{pmatrix} t$, (náleží kvadrice)
- Hodnost matice $\mathcal{K}$ je 2.
- Matice kvadriky

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{609}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{609}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- dvojice různoběžných rovin

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{609}}{2}\right) x'^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{609}}{2}\right) y'^2 = 0$$

$(4x + 2y - z - 3)(2x - 4y + 3z + 1) = 0$ (rozložením zadané rovnice)

Pomoc z MATLABu

- Zadání matice, např. $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$

  Pro zadání matice používáme **hranaté závorky** [],
  prvky v řádku oddělujeme **mezerou**,
  jednotlivé řádky oddělujeme středníkem:
  `A=[a b c d ; e f g h]`
- Přístup k prvkům: pomocí **kulatých** závorek a indexů
  `A(2,3) = 0`
- Výpočet determinantu
  ```
  Delta = det(A)
  delta = det(A(1:end-1, 1:end-1))
  ```
- Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů
  `[vlv, vlc] = eig(A)`
  Budou vytvořeny 2 matice:
  vlv: obsahuje sloupce, odpovídající vlastním vektorům
  vlc: diagonální matice, která má na hlavní diagonále vlastní č.
- Řešení soustavy rovnic $Ax = b$:
  `x=A\b`