Parametrické rovnice jednoduchých křivek

Cvičení 2.4.

S A M O S T U D I U M

teorie: skripta J. NEUSTUPA, Matematika II, vydání r. 2016, str. 76-79

Příklady v elektronické sbírce:

https://mat.nipax.cz/_media/19krivk-skalar.pdf

424 – 441

Vektorová funkce – připomenutí

Nechť $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. Je-li $\forall t \in \mathcal{D}$ přiřazen jediný vektor

$$\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad \text{resp.}$$

$$\vec{f}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad \vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1),$$

je v množině $\mathcal{D}$ definována vektorová funkce $\vec{f}(t)$ jedné proměnné $t \in \mathbb{R}$.
Množina $\mathcal{D}$ je definiční obor vektorové funkce $\vec{f}(t)$;
její složky $x(t), y(t), z(t)$ jsou reálné funkce argumentu t.

Geometrický význam
pro spojité $x(t), y(t), z(t)$ je $\vec{f}(t)$ rovnicí prostorové křivky.

Fyzikální význam trajektorie pohybujícího se hmotného bodu.

Parametrické vyjádření křivky

Křivku C lze zadat ve tvaru parametrických rovnic s parametrem t:

$$\boxed{x = x(t), y = y(t), z = z(t), \text{ kde } x(t), y(t), z(t) \text{ jsou spojité } t \in \langle a, b\rangle.}$$

Křivka C je v $\langle a,\ b\rangle$:

orientovaná souhlasně s parametrizací
právě tehdy, když jsou její body uspořádány tak, že
$\forall t_1, t_2 \in \langle a, b\rangle, t_1 < t_2 :$ bod $M_1 = [x(t_1), y(t_1), z(t_1)]$
leží před bodem $M_2 = [x(t_2), y(t_2), z(t_2)]$

orientovaná nesouhlasně s parametrizací
pro libovolné hodnoty $t_1, t_2 \in \langle a, b\rangle, t_1 < t_2$, leží bod M_2 před bodem M_1.
(někdy značíme $M_1 \prec M_2$ resp. $M_2 \prec M_1$)

Je-li křivka C orientována souhlasně s parametrizací, pak body $A = [x(a), y(a), z(a)]$ a $B = [x(b), y(b), z(b)]$ jsou její **krajní body**, bod A je počáteční bod a bod B koncový bod křivky C.

uzavřená, platí-li $A \equiv B$.

hladká, existuje-li spojitá a omezená derivace $f'(t) \neq \vec{o}$ pro $\forall t \in (a, b)$

jednoduchá, jestliže sama sebe neprotíná, tj.

$$\forall t_1, t_2 \in \langle a, b\rangle : t_1 \neq t_2 \Leftrightarrow M_1 \neq M_2$$

s možnou výjimkou $t_1 = a,\ t_2 = b,\ M_1 = M_2$.

Značení

dle skript J. Neustupy

- **parametrizace**

$$P(t) = [x(t),\ y(t),\ z(t)]$$ **hranaté závorky**

- **derivace**

$$\dot{P}(t) = (\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t))$$ **kulaté závorky**

Orientace tečným vektorem τ

(skripta, III.1.3)

- tečný vektor $\tau = \dot{P}(t)$
- **jednotkový** tečný vektor $\tau = \dfrac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}$

Jednoduchou hladkou křivku C nazveme orientovanou jednotkovým tečným vektorem τ, pokud zvolíme

$\tau = \dfrac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}$ ve všech bodech $P(t)$ odpovídajících $t \in (a,\ b)$

C je orientovaná souhlasně s parametrizací P

nebo

$\tau = -\dfrac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|}$ ve všech bodech $P(t)$ odpovídajících $t \in (a,\ b)$,

C je orientovaná nesouhlasně s parametrizací P.

Parametrická vyjádření křivek – **příklady** – úsečka

- **úsečka** AB, $A = [x_A,\ y_A,\ z_A]$, $B = [x_B,\ y_B,\ z_B]$
  použijeme známé parametrické rovnice úsečky:

$$X = A + t(B - A) \ \text{ tj. } \ \begin{array}{l} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{array}, \ t \in \langle 0,\ 1 \rangle$$

Příklad: parametrizace úsečky s krajními body $A = [1, 2, 3]$, $B = [3, 2, 1]$

$$x(t) = 1 + t(3 - 1),\ y(t) = 2 + t(2 - 2),\ z(t) = 3 + t(1 - 3),\ t \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$P(t) = [1 + 2t,\ 2,\ 3 - 2t],\ t \in \langle 0, 1 \rangle$$

Příklad: parametrizace úsečky s krajními body $A = [1, 3]$, $B = [-3, 2]$

$$x(t) = 1 + t(-3 - 1),\ y(t) = 3 + t(2 - 3)),\ t \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$P(t) = [1 - 4t,\ 3 - t],\ t \in \langle 0, 1 \rangle$$

Příklad: Určete krajní body úsečky $x = 2 + t$, $y = -3$, $z = 6t$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$
$A = [2,\ -3,\ 0]$, $B = [3,\ -3,\ 6]$

Parametrická vyjádření křivek – **příklady** – kružnice

- **kružnice** $x^2 + y^2 = R^2$, $\begin{array}{l} R \in \mathbb{R}, \\ R > 0 \end{array}$ $\begin{array}{l} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{array}$, $t \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$

$$P(t) = [R\cos t,\ R\sin t],\ t \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$$

Příklad: $x^2 + y^2 = 3$

$$x(t) = \sqrt{3}\cos t,\ y(t) = \sqrt{3}\sin t,\ t \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$$

$$P(t) = [\sqrt{3}\cos t,\ \sqrt{3}\sin t],\ t \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$$

- **kružnice** $(x-m)^2 + (y-n)^2 = R^2$, $\begin{array}{l} R \in \mathbb{R}, \\ R > 0, \\ m, n \in \mathbb{R} \end{array}$ $\begin{array}{l} x = m + R\cos t \\ y = n + R\sin t \\ t \in \langle 0,\ 2\pi \rangle \end{array}$

$$P(t) = [m + R\cos t,\ n + R\sin t],\ t \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$$

Příklad: $x^2 + y^2 - 4x = 0$ upravíme: $(x-2)^2 + y^2 = 4$

$$x(t) = 2 + 2\cos t,\ y(t) = 2\sin t,\ t \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$$

$$P(t) = [2 + 2\cos t,\ 2\sin t],\ t \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$$

Příklad: $x^2 + y^2 + 16y = 5$ upravíme: $x^2 + (y+8)^2 = 69$

$$x(t) = \sqrt{69}\cos t,\ y(t) = -8 + \sqrt{69}\sin t,\ t \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$$

$$P(t) = [\sqrt{69}\cos t,\ -8 + \sqrt{69}\sin t],\ t \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$$

Příklad: $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 2$ upravíme: $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 36$

$$x(t) = 3 + 6\cos t,\ y(t) = -5 + 6\sin t,\ t \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$$

Parametrická vyjádření křivek – **příklady** – elipsa

- **elipsa** $\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad \begin{matrix} a,\ b\in\mathbb{R} \\ a>0,\ b>0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{matrix}\ , \quad t\in\langle 0,\ 2\pi\rangle$

$$P(t)=[a\cos t,\ b\sin t],\ t\in\langle 0,\ 2\pi\rangle$$

Příklad: $4x^2+9y^2=36$ upravíme: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$$x(t)=3\cos t,\ y(t)=2\sin t,\ t\in\langle 0,\ 2\pi\rangle$$

$$P(t)=[3\cos t,\ 2\sin t],\ t\in\langle 0,\ 2\pi\rangle$$

Příklad: $4x^2+9y^2=36$ upravíme: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$$x(t)=3\cos t,\ y(t)=2\sin t,\ t\in\langle 0,\ 2\pi\rangle$$

$$P(t)=[3\cos t,\ 2\sin t],\ t\in\langle 0,\ 2\pi\rangle$$

- **elipsa** $\quad \dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1, \quad \begin{matrix} a,\ b\in\mathbb{R} \\ a>0,\ b>0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x=m+a\cos t \\ y=n+b\sin t \\ t\in\langle 0,\ 2\pi\rangle \end{matrix}$

$$P(t)=[m+a\cos t,\ n+b\sin t],\ t\in\langle 0,\ 2\pi\rangle$$

Příklad: $9x^2+4y^2-36x-16y+16=0$ upravíme: $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

$$x(t)=2+2\cos t,\ y(t)=2+3\sin t,\ t\in\langle 0,\ 2\pi\rangle$$

Parametrická vyjádření křivek – **příklady**

- **úsek** $y = f(x),\ x \in \langle a,\ b\rangle$ $\qquad \begin{matrix} x = t \\ y = f(t) \end{matrix},\ t \in \langle a,\ b\rangle$

$$P(t) = [t,\ f(t)]\ \ t \in \langle a,\ b\rangle$$

Příklad: Úsek hyperboly $y = \dfrac{1}{x}, x \in \langle 1,\ 10\rangle$

$$x(t) = t,\ y(t) = \frac{1}{t}\ t \in \langle 1,\ 10\rangle$$

$$P(t) = [t,\ \tfrac{1}{t}],\ t \in \langle 1,\ 10\rangle$$

Příklad: Úsek paraboly $y = (x-3)^2 + 2, x \in \langle 4,\ 5\rangle$

$$x(t) = t,\ y(t) = (t-3)^2 + 2\ t \in \langle 4,\ 5\rangle$$

$$P(t) = [t,\ (t-3)^2 + 2],\ t \in \langle 4,\ 5\rangle$$

Příklady

Rovinná křivka C je dána v parametrickém tvaru.
Určete její rovnici a křivku pojmenujte:

1. $C = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \ x = t, \ y = t, \ t \in \langle 0, \ 1\rangle\}$
2. $C = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \ x = (1 + t), \ y = t, \ t \in (-\infty, \infty)\}$
3. $C = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \ x = 2\cos t, \ y = 3\sin t, \ t \in \langle 0, \ 2\pi)\}$
4. $C = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \ x = t^2, \ y = t, \ t \in (-\infty, \ \infty)\}$
5. $C = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x = 1 - t, y = 1 + 2t, z = 2 + 3t, \ t \in \langle 0, \infty)\}$