Křivkový integrál vektorové funkce

Cirkulace – Greenova věta
Nezávislost na integrační cestě – potenciální pole

Cvičení 16.4.

S A M O S T U D I U M

teorie: skripta J. NEUSTUPA, Matematika II, vydání r. 2016,
str. 87-90, 115-126

Příklady v elektronické sbírce:

https://mat.nipax.cz/_media/greenova_veta.pdf

534 – 553

https://mat.nipax.cz/_media/potencial-18.pdf

554 – 590

Cirkulace, Greenova věta

Je-li C **uzavřená křivka** integrál

$$\int_C \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{s} \text{ označujeme } \oint_C \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{s}$$

Nechť jednoduchá uzavřená křivka ohraničuje oblast D. Křivka je **orientována kladně vzhledem k oblasti** D právě tehdy, když při pohybu po křivce ve směru orientace zůstává oblast D stále po levé ruce.

Greenova věta

Předpoklady:

1. Vektorová funkce dvou proměnných $\vec{f}(x,y) = (U(x,y), V(x,y))$ má spojité parciální derivace v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$.
2. C je kladně orientovaná, uzavřená, jednoduchá, po částech hladká křivka v D taková, že Int $C \subset D$.

Tvrzení:

$$\oint_C \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{s} = \iint_{\mathrm{Int}\,C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Poznámka: Je-li křivka C záporně orientovaná a předpoklady věty jsou splněny, platí tvrzení věty se znaménkem mínus před dvojným integrálem.

Příklad

553. Pomocí Greenovy věty vypočtěte integrál $\oint_c (y^2 e^x - y^3, 2ye^x - 3) \cdot d\vec{s}$, kde $c = c_1 \cup c_2$; $c_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x = 0,\ y \in \langle -2, 2 \rangle\}$, $c_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 4x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0\}$, přičemž $[0, 2]$ je počáteční bod křivky c_1. $[3\pi]$

- $U(x, y) = y^2 e^x - y^3,\ V(x, y) = 2ye^x - 3$
  mají spojité parciální derivace v $\mathbb{E}_2$
- $c = c_1 \cup c_2$ je uzavřená, jednoduchá, po částech hladká křivka v $\mathbb{E}_2$,
  $\text{Int } c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ x \geq 0\}$
- Je vhodné použít Greenovu větu:
  $\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 2ye^x - 2ye^x + 3y^2 = 3y^2$
- Zobecněné polární souřadnice:
  $x = r \cos \varphi, y = 2r \sin \varphi, 0 \leq r \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ dxdy = 2r\ drd\varphi$
- $\oint_c (U, V)\ d\vec{s} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 24r^3 \sin^2 \varphi\ dr\ d\varphi = \frac{24}{4} \cdot \frac{1}{2}\pi = 3\pi$

Příklad

547. Vypočtěte cirkulaci $\vec{f} = \dfrac{2(y, -x)}{x^2 + y^2}$ po kladně orientované křivce $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2;$ $x^2 + y^2 = 16\}$. Lze použít Greenovu větu ? Odpověď zdůvodněte! [-4π, nelze]

- Vektorové pole není definované v bodě $[0,\ 0]$, který leží v Int c. Proto Greenovu větu nelze použít.
- Integrál $\displaystyle\oint_c \vec{f}\, d\vec{s}$ existuje. Vypočteme pomocí parametrizace křivky c.
  $P(t) = [4\cos t,\ 4\sin t],\ t \in \langle 0,\ 2\pi),\ \dot{P}(t) = (-4\sin t,\ 4\cos t),$
  $\vec{f}(P(t)) = \dfrac{2}{16}(4\sin t,\ -4\cos t)$
- $\displaystyle\oint_c \vec{f}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{2}{16}(4\sin t,\ -4\cos t)\cdot(-4\sin t,\ 4\cos t)\ dt = -4\pi$

Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě

1. Jestliže hodnota křivkového integrálu II. druhu nezávisí na tvaru křivky, ležící v oblasti D a spojující body A, B, říkáme, že tento integrál nezávisí na integrační cestě mezi body A, B.
2. Platí-li to pro libovolné dva body A, B z oblasti D , říkáme, že tento integrál nezávisí na integrační cestě v oblasti D.

Věta

Nechť vektorová funkce $\vec{f}(X) = (P(X), Q(X), R(X))$ má spojité parciální derivace v oblasti D, v níž leží hladká křivka C s počátečním bodem A a koncovým bodem B. Pak platí:

1. Křivkový integrál nezávisí na integrační cestě v oblasti D právě tehdy, když $P(X)dx + Q(X)dy + R(X)dz$ je totálním diferenciálem kmenové funkce $h(X)$,
to je právě tehdy, když vektorové pole $\vec{f}(X)$ je potenciálové,
to je právě tehdy, když vektorové pole $\vec{f}(X)$ je nevírové,
tedy rot $\vec{f}(X) = \vec{o}$.

2. Křivkový integrál je v takovém případě roven rozdílu funkčních hodnot kmenové funkce $h(x, y, z)$ v koncovém a počátečním bodě.

Potenciální pole v $\mathbb{E}_2$

Nechť vektorová funkce $\vec{f} = (U, V)$ má spojité parciální derivace v **jednoduše souvislé** oblasti D a platí :

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

Potom existuje funkce $h(x, y)$ (kmenová funkce), pro kterou platí

$$\mathrm{grad}\ h = \vec{f}$$

Jak určit potenciál.

Vyjdeme z definice gradientu: $\text{grad}\ h = \left(\frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial h}{\partial y}\right) = (U,\ V)$

1. $\frac{\partial h}{\partial x} = U(x, y) \Rightarrow h(x, y) = \int U(x, y)\ dx = h_1(x, y) + C_1(y)$
2. $\frac{\partial h}{\partial y} = V(x, y) \Rightarrow h(x, y) = \int V(x, y)\ dy = h_2(x, y) + C_2(x)$
3. Kmenovou funkci $h(x, y)$ vytvoříme sloučením $h_1(x, y)$, $h_2(x, y)$, $C_1(y)$, $C_2(x)$, přičemž členy, které se vyskytují ve výrazech, zapisujeme do výsledného výrazu **pouze jedenkrát**.

Příklad

$$\vec{f} = \left(\underbrace{(2y - 3x^2)}_{U(x,y)}, \underbrace{2(x - y)}_{V(x,y)} \right)$$

1. Nutná podmínka: $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 2 = \dfrac{\partial V}{\partial y}, \quad D = \mathbb{E}_2$
2. $\displaystyle\int U(x, y)\ dx = \int 2y - 3x^2\ dx = \underbrace{2xy}_{h_1} - \underbrace{x^3}_{C_2(x)} + C_1(y)$
3. $\displaystyle\int V(x, y)\ dy = \int 2x - 2y\ dy = \underbrace{2xy}_{h_2} - \underbrace{y^2}_{C_1(y)} + C_2(x)$
4. $h(x, y) = 2xy - x^3 - y^2 + const$

Příklad

Mějme pole $\vec{f} = (U(x,y),\ V(x,y))$, o kterém **víme**, že je potenciální, například $\vec{f} = \left(y^2 + y\cos x + 6x,\ 2xy + \sin x + 5\right)$

Z definice: grad $h = \vec{f}$.

grad $h(x,y) = \left(\dfrac{\partial h}{\partial x},\ \dfrac{\partial h}{\partial y}\right)$, tedy

$$\frac{\partial h}{\partial x} = y^2 + y\cos x + 6x,\ \frac{\partial h}{\partial y} = 2xy + \sin x + 5$$

integrací dostaneme

$h(x,y) = \displaystyle\int y^2 + y\cos x + 6x\ \mathrm{d}x = xy^2 + y\sin x + 3x^2 + C_1(y)$

$h(x,y) = \displaystyle\int 2xy + \sin x + 5\ \mathrm{d}x = xy^2 + y\sin x + 5y + C_2(x)$.

$C_1(y)$ a $C_2(x)$ určíme porovnáním:

$$xy^2 + y\sin x + 3x^2 + C_1(y) = xy^2 + y\sin x + 5y + C_2(x)$$

$$3x^2 + K_1(y) = 5y + C_2(x) \Rightarrow C_1(y) = 5y,\ C_2(x) = 3x^2,$$

$$h(x,y) = xy^2 + y\sin x + 5y + 3x^2 + konst$$

Příklad: $(\sin^2 y\ ,(x\sin 2y - 2y)\ )$

1. Ověření nutné podmínky:
$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2\sin y\cos y = \sin 2y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad D = \mathbb{R}^2$$
2. $$\int U(x,y)\ dx = \int \sin^2 y\ dx = x\sin^2 y + C_1(y)$$
3. $$\int V(x,y)\ dy = \int (x\sin 2y - 2y)\ dy = -\frac{x}{2}\cos 2y - y^2 + C_2(x)$$
4. **Pozor!** rovnají se $x\sin^2 y$ a $-\frac{x}{2}\cos 2y$ **?**
$$-\frac{x}{2}\cos 2y = -\frac{x}{2}\left(\cos^2 y - \sin^2 y\right) =$$
$$-\frac{x}{2}\left(1 - \sin^2 y - \sin^2 y\right) = -\frac{x}{2} + x\sin^2 y$$
takže
$$\int \sin^2 y\ dx = x\sin^2 y + C_1(y) = -\frac{x}{2}\cos 2y + \frac{x}{2} + C_1(y)$$
5. $$h(x,y) = -\frac{x}{2}\cos 2y + \frac{x}{2} - y^2 + C$$
6. **Zkouška** $\operatorname{grad} h = (h_x, h_y) = \left(\frac{1-\cos(2y)}{2},\ x\sin(2y) - 2y\right)$

Jiný postup

Vycházíme z definice gradientu: $\operatorname{grad} h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \ \frac{\partial h}{\partial y} \right) = (U, \ V)$

1. $h_1(x,y)$ určíme stejně:
   $\frac{\partial h}{\partial x} = U(x,y) \Rightarrow h(x,y) = \int U(x,y)\ dx = h_1(x,y) + C_1(y)$
2. $C_1(y)$ určíme z podmínky:
   $\frac{\partial h}{\partial y} = V(x,y) \Rightarrow \frac{\partial h_1(x,y)}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}\ C_1(y)}{\mathrm{d}\ y} = V(x,y)$, tj.
   $C_1(y) = \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial U_1(x,y)}{\partial y} \right)\ dy$

Předcházející příklad

1. $\int U(x,y)\ dx = \int \sin^2 y\ dx = x \sin^2 y + C_1(y)$
2. $\underbrace{2x \sin y \cos y}_{x \sin 2y} + \frac{\mathrm{d}\ C_1(y)}{\mathrm{d}\ y} = x \sin(2y) - 2y \Rightarrow C_1(y) = y^2$
3. $h(x,y) = x \sin^2 y - y^2 + const = x \frac{(1 - \cos 2y)}{2} - y^2 + const$

Potenciální pole v $\mathbb{E}_3$

Předpokládejme, že $\vec{f}$ má spojité parciální derivace v jednoduše souvislé oblasti $D \subseteq \mathbb{E}_3$ a platí: rot $\vec{f} = 0$ v D.
Potom $\vec{f}$ je potenciální.

Příklad: gravitační pole

Intenzita gravitačního pole, vytvořeného hnotným bodem hmotnosti m, umístěným v počátku souřadného systému $\mathbb{E}_3$ je

$$g(x,y,z) = -\frac{\kappa m(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{ pro } x^2+y^2+z^2 > 0)$$

Určíme potenciál h pole $\vec{g}$. Z rovnosti grad $h = \vec{g}$ máme 3 rovnice:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\kappa m x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \ \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\kappa m y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \ \frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{\kappa m z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$h(x,y,z) = -\int \frac{\kappa m x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \Rightarrow h(x,y,z) = \frac{\kappa m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + K_1(y,z)$$
$$h(x,y,z) = -\int \frac{\kappa m y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y \Rightarrow h(x,y,z) = \frac{\kappa m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + K_2(x,z)$$
$$h(x,y,z) = -\int \frac{\kappa m z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}z \Rightarrow h(x,y,z) = \frac{\kappa m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + K_3(x,y)$$
$$K_1 = K_2 = K_3 = konst.$$

Vektorová funkce $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x,y,z)$ bývá ve fyzice často nazývána "radius vektor" a označována $\vec{r}$. Pomocí této funkce lze $\vec{g}$ i h zapsat:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{\kappa m \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}, \quad h(\vec{r}) = \frac{\kappa m}{\|\vec{r}\|} + konst.$$