Křivkový integrál vektorové funkce

(křivkový integrál 2. druhu)

Cvičení 9.4.

S A M O S T U D I U M

teorie: skripta J. NEUSTUPA, Matematika II, vydání r. 2016, str. 85-87

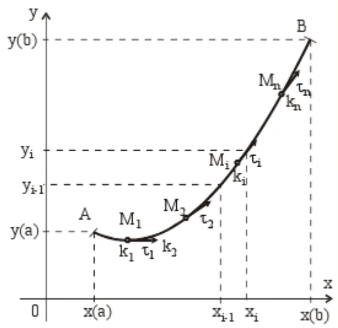
Příklady v elektronické sbírce:

`https://mat.nipax.cz/_media/19krivk-vektor_3.pdf`

498 – 533

Existence (připomenutí)

Mějme spojitou hladkou křivku k zadanou vektorovou funkcí $\vec{p}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$, kladně orientovanou vzhledem k parametru $t \in \langle a,\ b\rangle$. Interval $\langle a,\ b\rangle$ rozdělíme posloupností bodů $a = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b$ na dílčí intervaly. Tomuto dělení odpovídá rozdělení křivky k na n jednoduchých hladkých křivek $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Označíme Δ délku i-té dílčí křivky, $i = 1, 2, \ldots, n$. Na každé dílčí křivce k_i libovolně zvolíme bod $M_i = [x(t_i), y(t_i), z(t_i)]$, kterému odpovídá hodnota parametru t_i. V každém bodě M_i sestrojíme tečný vektor $\tau_i = \tau(M_i)$, který orientujeme souhlasně s křivkou k. **V možině $\mathcal{D}$, ve které leží křivka k, mějme definované, omezené a spojité: skalární funkci $f(x, y, z)$ a vektorovou funkci $\vec{F}(x, y, z)$.**



Tyto funkce nabývají v bodech M_i hodnot $f(M_i) = f(x(t_i), y(t_i), z(t_i)), \vec{F}(M_i)$.
Vytvoříme součiny $f(M_i)\Delta s_i$ a skalární součiny $\vec{F}(M_i)\tau_i\Delta s_i$.

Vytvoříme integrální součty $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$ $\quad\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\tau_i\Delta s_i$

Existuje-li pro $n \to \infty$ a $\Delta s_i \to 0$ pro všechna $i = 1, \ldots n$ limita intergálního součtu, nazveme tuto limitu křivkovým integrálem funkce $f(x, y, z)$ po křivce k, resp. vektorové funkce $\vec{F}(x, y, z)$ po kladně orientované křivce k.
Pro skalární funkci $f(x, y, z)$ křivkový integrál nezávisí na orientaci křivky.

Množinou integrace křivkového integrálu je rovinná nebo prostorová křivka.

Výpočet křivkového integrálu (připomenutí)

1. Parametrické vyjádření křivky:

$$P(t) = [x(t),\ y(t),\ z(t)]\,, \quad t \in \langle a,\ b\rangle$$ orientace - souhlasná?

2. Vypočítáme derivace (tečný vektor)

$$\dot{P}(t) = (\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t))$$

a určíme

$$\underbrace{\mathrm{d}s = \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ \mathrm{d}t}_{\text{pro skalární funkci}} \quad \text{resp.} \quad \underbrace{\mathrm{d}\vec{s} = \dot{P}(t)\ \mathrm{d}t}_{\text{pro vektorovou funkci}}$$

3. Vyjádříme $f(P(t))$

4. $$\overbrace{\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(P(t))\ \|\dot{P}(t)\|\ \mathrm{d}t}^{\text{pro skalární funkci}} \ \text{resp.}\ \overbrace{\int_C \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{s} = \pm \int_a^b \vec{f}(P(t)) \cdot \dot{P}(t)\mathrm{d}t}^{\text{pro vektorovou funkci}}$$

- Pro křivku vyjádřenou explicitně $y = g(x)$
  lze při $P(t) = [t,\ y(t)]$ vyjádřit $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$
- Pro vektorovou funkci $\vec{f} = (U, V, W)$ lze zapsat $\mathrm{d}\vec{s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$
  a $\vec{f} \cdot \dot{P}(t)\ \mathrm{d}t = U\mathrm{d}x + V\mathrm{d}y + W\mathrm{d}z$

Příklad 1

$$\int_C (x+y,\ x-y)\ \mathrm{d}\vec{s} \quad C \text{ je část rovnoosé hyperboly } y = \frac{1}{x},\ x \in \langle 2,\ 3\rangle$$

1. $P(t) = [t,\ \frac{1}{t}],\ t \in\in \langle 2,\ 3\rangle$
2. $\dot{P}(t) = \left(1,\ -\frac{1}{t^2}\right)$
3. $\vec{f}(P(t)) = \left(t + \frac{1}{t},\ t - \frac{1}{t}\right)$
4. $\int_C (x+y,\ x-y)\ \mathrm{d}\vec{s} = \int_2^3 \left(t+\frac{1}{t},\ t-\frac{1}{t}\right) \cdot \left(1,\ -\frac{1}{t^2}\right)\ \mathrm{d}t =$
   $= \int_2^3 \left(t + \frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\right)\ \mathrm{d}t = \frac{185}{72}$

Příklad 2

$$\int_C (x,\ y^2,\ z^3)\ \mathrm{d}\vec{s} \quad C \text{ je úsečka } AB: \begin{array}{l} A = [0,\ 0,\ 0] \\ B = [4,\ 3,\ 2] \end{array},\ \text{od bodu } A.$$

1. $P(t) = [4t,\ 3t,\ 2t],\ t \in \langle 0,\ 1 \rangle$
2. $\dot{P}(t) = (4,\ 3,\ 2)$
3. $\vec{f}(P(t)) = \left(4t,\ 9t^2,\ 8t^3\right)$
4. $\displaystyle\int_C (x,\ y^2,\ z^3\ \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^1 \left(4t,\ 9t^2,\ 8t^3\right) \cdot (4,\ 3,\ 2)\ \mathrm{d}t =$
   $\displaystyle= \int_0^1 \left(16t + 27t^2 + 16t^3\right)\ \mathrm{d}t = 21$

Příklad 3

$$\int_C (x,\ y)\ \mathrm{d}\vec{s} \quad C \text{ je část elipsy } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

od bodu $A = [4,\ 0]$ do bodu $B = [0,\ 3]$.

1. $P(t) = [4\cos t,\ 3\sin t],\ t \in \langle 0,\ \frac{\pi}{2}\rangle$
2. $\dot{P}(t) = (-4\sin t,\ 3\cos t)$
3. $\vec{f}(P(t)) = (4\cos t,\ 3\sin t)$
4. $$\int_C (x,\ y)\ \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos t,\ 3\sin t)\cdot(-4\sin t,\ 3\cos t)\ \mathrm{d}t =$$
   $$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -7\cos t \sin t\ \mathrm{d}t = \frac{7}{2}$$