

Trojný integrál

cvičení

S A M O S T U D I U M

teorie: skripta J. NEUSTUPA, Matematika II, vydání r. 2016, str. 61-75

Příklady v elektronické sbírce:

https://mat.nipax.cz/_media/trojny_19.pdf

342 – 423

Obsah

- 1 Trojrozměrný Riemannův integrál na kvádru
- 2 Trojrozměrný integrál na obecné omezené množině
- 3 Transformace do válcových (cylindrických) souřadnic
- 4 Transformace do sférických souřadnic
- 5 Aplikace trojrozměrného integrálu

Trojrozměrný Riemannův integrál na kvádru

Mějme funkci tří nezávisle proměnných $u = f(x, y, z)$ spojitou a omezenou **v kvádru**

$$G = \{(x, y, z : x \in \langle a, b \rangle, y \in \langle c, d \rangle, z \in \langle e, h \rangle)\}$$

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx dy dz$$

Integrál počítáme **převedením na trojnásobný** – trojnásobnou integrací funkce jedné proměnné.

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^h f(x, y) \, dz \right) dy \right) dx$$

Příklady: obor integrace – kvádr – konstantní meze

$$\textcircled{1} \quad I = \iiint_G \ln x^{yz} \, dx dy dz,$$
$$G = \{[x, y, z] : x \in \langle 1, 2 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle, z \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

$$I = \int_1^2 \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{yz \ln x}_{f_1(x)f_2(y)f_3(z)} \, dz dy dx =$$
$$\int_1^2 \ln x dx \cdot \int_0^1 y dy \cdot \int_0^1 z dz = \dots = \frac{1}{4}(2 \ln 2 - 1)$$

$$\textcircled{2} \quad I = \iiint_G \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \right) dx dy dz,$$
$$G = \{[x, y, z] : x \in \langle 1, 2 \rangle, y \in \langle 1, 2 \rangle, z \in \langle 1, 2 \rangle\}$$

$$I = \int_1^2 \left(\int_1^2 \left(\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \right) dx \right) dy \right) dz = \dots = 6 \ln 2$$

Nejprve určíme vnitřní ... postupujeme zevnitř ven

Elementární obor integrace

Ω je ohraničena uzavřenou plochou, která sama sebe neprotíná; rovnoběžky s osou z , vedené jejími vnitřními body, ji protínají ve dvou bodech. Pravoúhlý průřez Ω_1 plochy Ω do roviny os xy je měřitelná uzavřená množina v \mathbb{E}_2 , $z=f_1(x,y)$ a $z=f_2(x,y)$ jsou spojité funkce na Ω_1 , pro které platí: $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$, $\forall [x,y] \in \Omega_1$. Pak množinu

$$\Omega = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3, f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\}$$

nazýváme **EOI vzhledem k rovině xy** .

Určení Ω nerovnicemi provedeme následujícím způsobem.

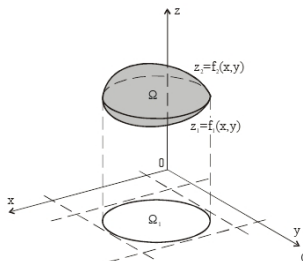
Určíme-li pravoúhlý průřez výše popsané uzavřené plochy do roviny os xy , pak dotyková válcová plocha rozdělí danou uzavřenou plochu na dvě části, které lze vyjádřit rovnicemi $z = f_1(x,y)$ a $z = f_2(x,y)$.

Platí $f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)$, tj. $z \in \langle f_1(x,y), f_2(x,y) \rangle$.

Pravoúhlým průřezem dané uzavřené plochy do souřadnicové roviny os xy je rovinná oblast Ω_1 , která EOI vzhledem k ose x nebo vzhledem k ose y .

Stejným způsobem jako pro dvojný integrál lze stanovit nerovnice,

kteří vyjadřují množinu Ω_1 jako EOI vzhledem k ose x , respektive ose y .



Pořadí integrace a Fubiniho věta

Jestliže je funkce $f(x, y, z)$ spojitá na množině Ω , pro kterou platí:

$$\Omega : \left. \begin{array}{l} x_1 \leq x \leq x_2 \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \\ f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \Omega_1 \\ \text{EOI}_x \end{array} \right\} \text{EOI}_{xy},$$

pak platí:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{x_1}^{x_2} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz dy dx$$

Pro převedení na trojnásobný integrál je nutné množinu Ω analyticky vyjádřit v takovém tvaru, aby :

meze vnějšího integrálu byly konstantní,

meze prostředního integrálu mohou být funkcí nejvýše jedné proměnné a meze vnitřního integrálu mohou být funkcí nejvýše dvou proměnných.

Obvykle postupujeme tak, že nejprve vyjádříme meze proměnné z .

Pak určíme pravouhý průmět Ω_1 integrační množiny Ω do souřadnicové

roviny os xy :
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_{\Omega_1} \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dx dy$$

Množinu Ω_1 nakonec vyjádříme jako EOI vzhledem k ose x nebo jako EOI vzhledem k ose y , jako pro dvojný integrál.

Příklad: určení nerovnic

Nerovnice určující množinu $\Omega \subset \mathbb{E}_3$, která je ohraničena rovinami
 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 2y + z - 6 = 0$.

Nerovnice pro z : $0 \leq z \leq 6 - 2x - 2y$

Pravoúhlý průmět Ω do roviny $z = 0$:

$$2x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow x + y = 3$$

$$\Omega_1 : \begin{cases} x + y \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

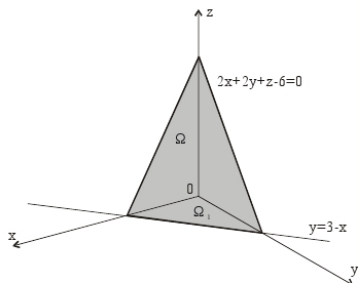
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_{\Omega_1} \int_0^{6-2x-2y} f(x, y, z) \, dz \, dx dy$$

nerovnice v rovině $z = 0$: např.

$$0 \leq x \leq 3$$

$$0 \leq y \leq 3 - x$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{6-2x-3y} f(x, y, z) \, dz dy dx$$



Příklad: určení nerovnic

Nerovnice určující množinu $\Omega \subset \mathbb{E}_3$, která je ohraničena plochami dvou paraboloidů $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $z = 4 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Nerovnice pro z :

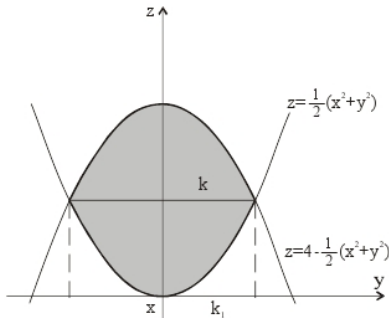
$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 4 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Pravouhlý průmět Ω do roviny xy :

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 4 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$\Omega_1 : x^2 + y^2 \leq 4$$

$$\begin{aligned} -2 \leq x \leq 2 & & x &= r \cos \varphi \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} & & y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega_1} \int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{4-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} f(x, y, z) dz dx dy$$

Příklad: výpočet

Vypočtete integrál $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx dy dz$,

Ω je ohraničena plochami

$x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 2, x + y - z = 0$.

Řešení

- nerovnice pro z : $0 \leq z \leq x + y$
- průmět: $x = 0, y = 0, x + y = 2$
- nerovnice pro x, y :
 $0 \leq x \leq 2$
 $0 \leq y \leq 2 - x$
- zápis trojnásobného integrálu:

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx dy dz = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{x+y} (x^2 + y^2) \, dz dy dx$$

- integrace

$$\int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{x+y} (x^2 + y^2) \, dz dy dx = \dots$$

Příklady

https://mat.nipax.cz/_media/trojny_19.pdf

347 – 351

Transformace v trojrozměrném integrálu

Pro vyjádření integrační množiny, kterou tvoří rotační (nebo eliptický) **válec** nebo jeho část, případně **koule** nebo její část (elipsoid nebo její část) jsou vhodné **válcové (cylindrické)** nebo **sférické** souřadnice.

Obecně jsou transformace v trojrozměrných integrálech dány rovnicemi

$$x = u(r, s, t), y = v(r, s, t), z = w(r, s, t),$$

kde funkce $u(r, s, t), v(r, s, t), w(r, s, t)$, $\Omega^* \rightarrow \Omega$, jsou spojitě diferencovatelné v Ω^* .
V trojrozměrném integrálu platí

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} f(u(r, s, t), v(r, s, t), w(r, s, t)) |J| dr ds dt,$$

kde jakobián $|J| \neq 0$ v Ω^* .

Pro jakobián transformace platí

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

Transformace do válcových (cylindrických) souřadnic

Trojici kartézských souřadnic x, y, z nahradíme trojicí válcových souřadnic r, φ, w . Význam válcových souřadnic r a φ je stejný jako v případě polárních souřadnic u dvojrozměrných integrálů, třetí souřadnice z se nemění.

V trojúhelníku OPX_0 platí $\cos \varphi = \frac{x}{r}$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$.

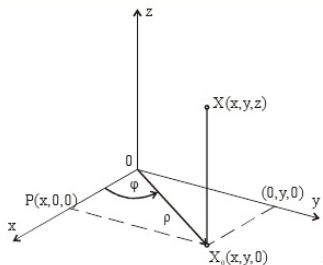
Odtud pro $r \neq 0$ platí $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Transformační rovnice:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = w$$



Pro jakobián transformace platí: $J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$

Transformace do sférických souřadnic

Trojici kartézských souřadnic x, y, z

nahradíme trojicí sférických souřadnic r, φ, ϑ .

Význam souřadnic r, φ, ϑ :

r : ($r \geq 0$) vzdálenost bodu $X = [x, y, z]$ od počátku soustavy souřadnic.

φ : orientovaný úhel měřený v souřadnicové rovině os xy od kladného směru osy x po průvodič bodu $[x, y, 0]$ v kladném smyslu.

ϑ : orientovaný úhel od průvodiče bodu $[x, y, 0]$ po průvodič bodu $[x, y, z]$ v kladném smyslu.

Transformační rovnice

$$x = r \cos \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \cos \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \sin \vartheta$$

$$dx dy dz = r^2 \cos \vartheta \, dr d\varphi d\vartheta$$

v rovině xy :

$\triangle OAX_0$

$A = [x, 0, 0]$

$$x = r' \cos \varphi$$

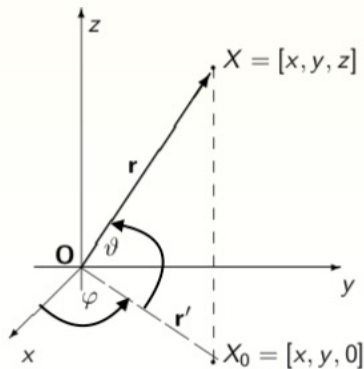
$$y = r' \sin \varphi$$

v rovině $z\overline{OX_0}$:

$\triangle XOX_0$

$$r' = r \cos \vartheta$$

$$z = r \sin \vartheta$$



Příklady

https://mat.nipax.cz/_media/trojny_19.pdf

358 – 363

řešené : 352 – 357

Aplikace trojrozměrného integrálu

- **Objem tělesa Ω :** $V = \iiint_{\Omega} \mathbf{1} \, dx dy dz$
- **Hmotnost tělesa** určeného množinou Ω , jehož hustota v každém bodě $X(x, y, z)$ je dána funkcí $\rho = \rho(x, y, z)$, je určena vztahem

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dx dy dz$$

- **Statický moment** tělesa vzhledem k
 - rovině xy : $m_{xy} = \iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) \, dx dy dz$
 - rovině yz : $m_{yz} = \iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) \, dx dy dz$
 - rovině xz : $m_{xz} = \iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) \, dx dy dz$
- Souřadnice **těžiště** $T = (T_x, T_y, T_z)$ tělesa Ω jsou

$$T_x = \frac{m_{yz}}{m} \quad T_y = \frac{m_{xz}}{m} \quad T_z = \frac{m_{xy}}{m}$$

Moment setrvačnosti

- **Moment setrvačnosti** tělesa Ω vzhledem k

- rovině xy : $J_{xy} = \iiint_{\Omega} z^2 \rho(x, y, z) \, dx dy dz$

- rovině yz : $J_{yz} = \iiint_{\Omega} x^2 \rho(x, y, z) \, dx dy dz$

- rovině xz : $J_{xz} = \iiint_{\Omega} y^2 \rho(x, y, z) \, dx dy dz$

- **Moment setrvačnosti** tělesa Ω rotujícího kolem

- osy x : $J_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx dy dz$

- osy y : $J_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx dy dz$

- osy z : $J_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx dy dz$

- **Moment setrvačnosti** tělesa Ω vzhledem k počátku

- $J_0 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx dy dz$

Příklady

https://mat.nipax.cz/_media/trojny_19.pdf

380 – 423

řešené : 365 – 379