Lokální extrémy funkce dvou (a tří) proměnných

Cvičení 7.

Obsah

Lokální extrémy

Definice

Funkce $y = f(X)$ má v bodě $A \in D(f)$ **lokální minimum**, jestliže existuje takové (prstencové) okolí $\mathcal{O}(A) \subseteq D(f)$ bodu A, že pro **každý** bod $X \in \mathcal{O}(A)$ platí nerovnost $f(X) \geq f(A)$.

Funkce $y = f(X)$ má v bodě $A \in D(f)$ **lokální maximum**, jestliže existuje takové (prstencové) okolí $\mathcal{O}(A) \subseteq D(f)$ bodu A, že pro **každý** bod $X \in \mathcal{O}(A)$ platí nerovnost $f(X) \leq f(A)$.

Nutná podmínka existence lokálního extrému

Nechť funkce $y = f(X)$, která je definovaná na určitém okolí $\mathcal{O}(A)$ bodu A má v tomto bodě lokální extrém.

Existuje-li parciální derivace $\dfrac{\partial f(A)}{\partial x_i}$,

potom se tato parciální derivace v bodě A rovná nule.

Definice Bod $A \in D(f)$ je stacionárním bodem funkce $f(X)$, jestliže

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial f(A)}{\partial x_2} = 0, \dots \frac{\partial f(A)}{\partial x_n} = 0$$

Poznámky

- Funkce může mít extrém v bodě, ve kterém neexistuje některá parciální derivace.
- Podmínka pro stacionární bod je ekvivalentní podmínce

$$df(A) = 0 \quad \text{nebo} \quad \operatorname{grad} f(A) = \vec{0}$$

- Pokud $df(A) \neq 0$, funkce nemá lokální extrém v bodě A.

Postačující podmínky existence lokálního extrému

Nechť funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ je spojitá se svými parciálními derivacemi prvního a druhého řádu v okolí bodu P a nechť

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f(P)}{\partial y} = 0.$$

Označíme

$$\Delta_2(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Potom platí:

1. Při $\Delta_2(P) > 0$ **má** funkce $f(x, y)$ v bodě P **lokální extrém**.
   1. Pokud $\dfrac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} > 0$ má funkce v bodě P **lokální minimum**;
   2. pokud $\dfrac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} < 0$ má funkce v bodě P **lokální maximum**.
2. Při $\Delta_2(P) < 0$ **nemá** funkce $f(x, y)$ v bodě P lokální extrém.
3. Je-li $\Delta_2(P) = 0$, **nelze pomocí této podmínky rozhodnout**.

Příklad: "nelze rozhodnout"

$$\textbf{a)} \quad z = x^4 + y^4 \qquad \textbf{b)} \; z = x^3 + y^3$$

V obou případech mají funkce jediný bod, ve kterém jsou derivace 1. řádu rovny nule, bod $P = [0, 0]$.
Druhé derivace jsou v tomto bodě také rovny nule a $\Delta_2(P) = 0$.
a)

$$\forall X \in \mathcal{O}(P) : \; f(X) \geq f(P),$$

protože $f(P) = 0$ a $f(X) \geq 0$. Z definice lokálního minima plyne, že funkce f má v bodě $P = [0, 0]$ lokální minimum rovné nule.
b)
Funkce $z = x^3 + y^3$ má v bodě P nulovou hodnotu, ale v okolí tohoto bodu nabývá jak kladných, tak záporných hodnot.
Proto v tomto bodě nemá lokální extrém.

Postup

1. Určíme parciální derivace 1. řádu.
2. Určíme bod(y) z definičního oboru funkce, ve kterých jsou tyto derivace nulové (nebo neexistují).
3. Určíme derivace duhého řádu a Hessovu matici.
4. Pro každý "podezřelý" bod vypočteme determinant Δ_2 a dále je-li ve zkoumaném bodě
   - $\Delta_2 < 0$, funkce nemá v tomto bodě extrém.
   - $\Delta_2 > 0$, určíme

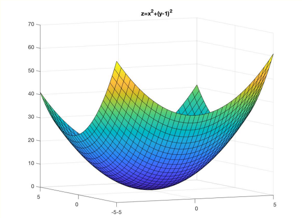
     typ extrému z $\Delta_1 = \dfrac{\partial^2(P)}{\partial x^2}$

     - $\Delta_1 > 0$ v bodě P je lokální minimum
     - $\Delta_1 < 0$ v bodě P je lokální maximum

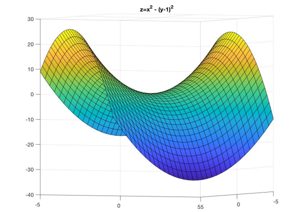
     hledanou hodnotu extrému $f(P)$.
   - $\Delta_2 = 0$, nevíme... rozhodneme z definice.

Příklady

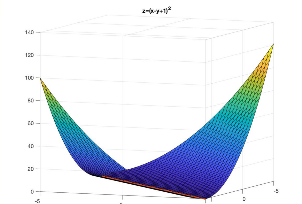
- $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$
  plocha: eliptický paraboloid



- $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$
  hyperbolický paraboloid



- $f(x,y) = (x-y+1)^2$
  parabolická válcová plocha



Příklady

https://mat.nipax.cz/_media/extremy_funkci.pdf

příklady 209-222

Příklad: $z = x^3 + y^3 - 3xy$

1. Parciální derivace 1. řádu:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$
2. Bod(y), ve kterých jsou tyto derivace nulové:
$$3x^2 - 3y \wedge 3y^2 - 3x \Rightarrow y = x^2,\ y^2 = x^4 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow$$
$x_1 = 0, x_2 = 1$ a hledané body jsou $P_1 = [0,0],\ P_2 = [1,1]$
3. Určíme derivace duhého řádu:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$
4. $$\Delta_2(P_1) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 \quad \Delta_2(P_2) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27$$
5. **Závěr.** V bodě P_1 je $\Delta_2(P_1) < 0$, proto funkce z nemá lokální extrém v bodě P_1. V bodě P_2 je $\Delta_2(P_2) > 0$, proto funkce z má v tomto bodě lokální extrém; typ extrému: $\frac{\partial^2 z(P_2)}{\partial x^2} > 0$, tedy v tomto bodě je lokální minimum $f(P_2) = -1$.

Postačující podmínky existence lokálního extrému

Nechť funkce tří proměnných $u = f(x, y, z)$ je spojitá se svými parciálními derivacemi prvního a druhého řádu v okolí bodu P a nechť

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f(P)}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial f(P)}{\partial z} = 0.$$

Označíme

$$\Delta_3(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial z^2} \end{vmatrix}, \Delta_2(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y^2} \end{vmatrix}, \Delta_1(P) = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2}$$

Potom platí:

1. Při $\Delta_2(P) > 0$ **má** funkce $f(x, y, z)$ v bodě P **lokální extrém**, pokud
    1. $\Delta_1(P) > 0, \Delta_3(P) > 0$ je $f(P)$ **lokální minimum**;
    2. $\Delta_1(P) < 0, \Delta_3(P) < 0$ je $f(P)$ **lokální maximum**.
2. Při $\Delta_2(P) < 0$ **nemá** funkce $f(x, y)$ v bodě P lokální extrém.

Příklady

https://mat.nipax.cz/_media/extremy_funkci.pdf

příklady 225-227

Příklad

$$f(x,y,z) = 2xy^2 - 4xy + x^2 + z^2 - 2z$$

- Derivace prvního řádu a podezřelé body

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 - 4y + 2x$ $\qquad 2y^2 - 4y + 2x = 0 \qquad P_1 = [0,\ 0,\ 1]$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy - 4x$ $\qquad 4x(y-1) = 0 \qquad P_2 = [0,\ 2,\ 1]$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2$ $\qquad 2(z-1) = 0 \qquad P_3 = [1,\ 1,\ 1]$

- Derivace druhého řádu

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 4y-4 & 0 \\ 4y-4 & 4x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = 8x - (4y-4)^2$$

- Δ_2 v podezřelých bodech

$\Delta_2(P_1) = -16$ — není extrém,

$\Delta_2(P_2) = -16$ — není extrém,

$\Delta_2(P_3) = 8$ — $\Delta_1(P_3) = 2, \Delta_3(P_3) = 32$

lok. min. $f(1,1,1) = -2$

Příklad

$$f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z), \qquad \begin{array}{c} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi \\ 0 \leq z \leq \pi \end{array}$$

- Derivace prvního řádu a podezřelé body

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \cos(x+y+z) \qquad P_1 = [0,\ 0,\ 0]$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \cos(x+y+z) \qquad P_2 = \left[\tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{\pi}{2},\ \tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \cos z - \cos(x+y+z) \qquad P_3 = [\pi,\ \pi,\ \pi]$$

- Derivace druhého řádu (označme $S = \sin(x+y+z)$)

$$H = \begin{pmatrix} -\sin x + S & S & S \\ S & -\sin y + S & S \\ S & S & -\sin z + S \end{pmatrix}$$

- Δ_2 v podezřelých bodech

$$\Delta_2(0,0,0) = 0 \qquad \Delta_2\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 3 \qquad \Delta_2(\pi,\pi,\pi) = 0$$

$$f(0,0,0) = 0 \qquad \Delta_1(P_2) = -2, \Delta_3(P_2) = -4 \qquad f(\pi,\pi,\pi) = 0$$

minimum   maximum $f(P_2) = 3$ minimum

Vázané extrémy

Extrémy funkce vzhledem k předem zadaným podmínkám.

Definice
Řekneme, že funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ má v bodě $A \in D(f)$ lokální extrém, vázaný m podmínkami $(m < n)$:

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

jestliže pro všechny body $X \in \mathcal{O}(A) \subset D(f)$, které vyhovují uvedeným podmínkám, platí jedno z:

- $f(X) \geq f(A)$, má funkce f v bodě A vázané lokální minimum
- $f(X) \leq f(A)$, má funkce f v bodě A vázané lokální maximum

Geometrický význam pro funkci 2 proměnných.
Podmínka $g(x, y) = 0$ určuje plochu v prostoru. Hledaný extrém funkce $f(x, y)$ musí ležet v průsečíku $z = f(x, y)$ a $g(x, y) = 0$.
Vázané extrémy funkce $f(x, y)$ jsou tedy lokálními extrémy křivky k $= f(x, y) \cap g(x, y)$

Příklad

Jestliže lze z rovnice $g(x,y)=0$ jednoznačně vyjádřit $y=\varphi(x)$ resp. $x=\psi(y)$, pak lokální extrémy funkce $z=f(x,y)$ vázané podmínkou $g(x,y)=0$ můžeme určit jako lokální extrémy funkce jedné proměnné $z=f(x,\varphi(x))$ resp. $z=f(\psi(y),y)$.

Určíme lokální extrémy $f(x,y)=xy-x+y-1$, vzhledem k podmínce $x+y=1$.

1. Definiční obor $D(f)=\mathbb{R}^2$.
2. Z podmínky $g(x,y)=0$, tj. $x+y-1=0$ můžeme vyjádřit například $y=1-x$.
3. Dosadíme $y=1-x$ do funkce $z=f(x,y)=xy-x+y-1$ a dostaneme funkci jedné proměnné x:
   $h(x)=f(x,1-x)=x(1-x)-x+(1-x)-1=-x^2-x$
4. Hledáme extrémy funkce jedné proměnné:
   $h'=-2x-1, \quad h'(x)=0$ pro $x=-\frac{1}{2}$
   $h(x)=-x^2-x$ má v bodě $x=-\frac{1}{2}$ lokální maximum (proč?).
5. Dopočítáme $y=1-x=\frac{3}{2}$.
6. Funkce $z=f(x,y)$ má v bodě $A=[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ vázané lokální maximum $z=f(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})=\frac{1}{4}$

Lagrangeova metoda (pro zvídavé)

Věta (Lagrangeova metoda)

Mějme funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$ a m, $(m < n)$ podmínek $g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
Jestliže má funkce Φ (Lagrangeova funkce)

$$\Phi = f(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1, \ldots, x_n),$$

kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ jsou tzv. Lagrangeovy multiplikátory ve svém stacionárním bodě lokální extrém, má i funkce f v tomto bodě lokální extrém vázaný podmínkami $g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.
Stacionární body funkce Φ určíme jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= 0 & g_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= 0 & &\vdots \\ &\vdots & g_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} &= 0 & & \end{aligned}$$

Příklad

Najdeme extrémy funkce $z = x + y$ vázané podmínkou
$g(x, y) : \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1.$

1. Sestavíme Lagrangeovu funkci $\Phi = x + y + \lambda \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - 1 \right)$.
2. Parciální derivace funkce Φ
   $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - \dfrac{2\lambda}{x^3}, \quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 - \dfrac{2\lambda}{y^3}$
3. Soustava rovnic:
   $1 - \dfrac{2\lambda}{x^3} = 0, \quad 1 - \dfrac{2\lambda}{y^3} = 0, \quad \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - 1 = 0$
   tj. pro $x \neq 0, y \neq 0$: $x^3 = 2\lambda,\ y^3 = 2\lambda,\ x^2 + y^2 = x^2 y^2,$
   $x = \sqrt[3]{2\lambda}, \quad y = \sqrt[3]{2\lambda}, \quad \sqrt[3]{32\lambda^2} = \sqrt[3]{16\lambda^4}$ tj. $\lambda^2(\lambda^2 - 2) = 0.$
4. řešení soustavy: $\lambda_1 = \sqrt{2},\ x_1 = y_1 = \sqrt{2},$
   $\lambda_2 = -\sqrt{2}, x = y = -\sqrt{2},$
   $\lambda_3 = 0\ (x \neq 0,\ y \neq 0)$
5. Dále určíme druhé derivace funkce Φ a z nich určíme existenci a typ extrému v bodech $[\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ a $[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$

Globální extrémy

Globální extrémy mají stejný význam jako u funkcí jedné proměnné. Hledáme je buď na celém definičním oboru dané funkce, nebo na předem zadané podmnožině definičního oboru.

Definice

Funkce $y = f(X)$ má na **uzavřené** podmnožině M definičního oboru $M \subseteq D(f)$ **globální (absolutní) minimum** bodě $A \in M$, jestliže že pro **každý** bod $X \in M$ platí nerovnost $f(X) \geq f(A)$.

Funkce $y = f(X)$ má na **uzavřeném** podmnožině M definičního oboru $M \subseteq D(f)$ **globální (absolutní) maximum** bodě $A \in M$, jestliže že pro **každý** bod $X \in M$ platí nerovnost $f(X) \geq f(A)$.

Poznámka

Na rozdíl od lokálních extrému, které se hledají na okolích bodů, hledáme globální extrémy na celé množině $M \subseteq D(f)$.

Určování globálních extrémů

Uvažujme spojitou a alespoň dvakrát spojitě diferencovatelnou funkci (tj. existují spojité parciální derivace alespoň až do druhého řádu) $z = f(x, y)$, definovanou na uzavřené množině $M \subseteq D(f)$. Nechť hranice této množiny je křivka o rovnici $g(x, y) = 0$. Globální extrémy funkce f na množině M budeme určovat takto:

1. Určíme lokální extrémy funkce f na množině M , ze které vyloučíme hranici.
2. Určíme lokální extrémy této funkce vázané podmínkou $g(x, y) = 0$.
3. Porovnáme funkční hodnoty všech extrémů. Extrém s největší funkční hodnotou bude globálním maximem, extrém s nejmenší funkční hodnotou bude globálním minimem.

Je-li hranice tvořena konečným počtem křivek, vyšetřujeme vázané extrémy na jednotlivých křivkách. V tomto případě ovšem musíme uvažovat i **vrcholy** hraničních křivek při konečném porovnávání funkčních hodnot.

Příklady

1. Najdeme globální extrémy funkce $z = f(x, y)$,

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,$$

na množině

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -x + 3\}$$

2. $f(x, y) = x + \ln x - y^2$
$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \; y = x + 1, \; \frac{1}{4} \leq x \leq 1\}$
3. $f(x, y) = x^2 + xy - 3x - y$
$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \; x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$
4. $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2$
$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : \; x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$