Funkce více proměnných

Vektorová funkce
Parciální derivace 2. řádu.

Cvičení 6

Obsah

Skalární pole – připomenutí

- Skalární pole v $\Omega \subset \mathbb{E}_3$ je určeno libovolnou funkcí $u(x, y, z)$, která je v Ω definovaná.
  Hladina skalárního pole (ekvipotenciální plocha) je plocha vyjádřená rovnicí $u(x, y, z) = const$.
  Mírou změny skalárního pole je derivace ve směru.
- Gradient. Jestliže $u(\vec{r}) = u(x, y, z)$, kde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ je diferencovatelné skalární pole, pak jeho gradientem nazveme vektor

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}, \quad \text{resp. grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

  Při označení $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, resp. $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ zapisujeme

$$\text{grad } u = \nabla u.$$

  Gradient pole u má v bodě (x, y, z) směr normálového vektoru ekvipotenciální plochy $u(x, y, z) = C$, která tímto bodem prochází.
  Velikost tohoto vektoru je $|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$ a jeho směr je směrem největšího spádu pole u.
- Derivace pole u ve směru ℓ má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \text{grad } u \cdot \frac{\ell}{\|\ell\|}$$

Vektor, funkce, vektorová funkce

Funkce je předpis, který
každému prvku z množiny D (definičního oboru funkce)
jednoznačně přiřadí
prvek z množiny H (oboru hodnot funkce).

$$\forall a \in D(f) \xrightarrow{f} \text{ jediné } b \in H(f): \; b = f(a)$$

Příklady

$D(f) \subseteq \mathbb{R}$	$H(f) \subseteq \mathbb{R}$	reálná funkce funkce jedné reálné proměnné
$D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$	$H(f) \subseteq \mathbb{R}$	reálná funkce funkce 2 reálných proměnných
$D(f) \subseteq \mathbb{R}$	$H(f) \subseteq \mathbb{R}^2$	**vektorová** funkce jedné reálné proměnné
$D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$	$H(f) \subseteq \mathbb{R}^2$	**vektorová** funkce dvou proměnných

Vektor: prvky - čísla nebo funkce

Operace s vektory součet, násobení reálným číslem,
skalární součin, vektorový součin

Vektor z funkcí: limity, derivace, ...

Vektorová funkce jedné proměnné (vektorové pole)

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}$. Je-li $\forall t \in D$ přiřazen jediný vektor

$$\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

kde $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$,

říkáme, že v množině D je definována

vektorová funkce $\vec{f}(t)$ jednoho reálného argumentu t.

Definiční obor vektorové funkce $\vec{f}(t)$ je množina D.

Obor hodnot: množina vektorů o složkách $x(t), y(t), z(t)$,

složky vektorů jsou reálné funkce argumentu t.

Vektorové pole je v matematice a fyzice

funkce přiřazující každému **bodu** prostoru **vektor**.

Ve fyzice se užívá k popisu změny vektorové veličiny (např. pole rychlostí kapaliny v jednotlivých bodech, vektorové pole síly v gravitačním poli).

Geometrický význam vektorové funkce

$\vec{f}(t)$ je množina bodů v trojrozměrném prostoru o souřadnicích $(x(t), y(t), z(t)), t \in D$. Jsou-li funkce $x(t), y(t), z(t)$ spojité v množině D, pak spojitá vektorová funkce $\vec{f}(t)$ je **rovnicí prostorové křivky**, jejíž parametrické vyjádření má tvar $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in D$.

Z fyzikálního hlediska představuje vektorová funkce **trajektorii pohybujícího se hmotného bodu**.

Příklady

- Určete definiční obor vektorové funkce
  $\vec{f}(t) = \left(2\arcsin\frac{2t-4}{3}+3\right)\vec{i} + 3\arccos\frac{t-4}{3}\vec{j} + t\vec{k}$.
- Pohyb hmotného bodu je určen vektorovou funkcí
  $$\vec{f}(t) = e^{\omega t}\vec{i} + e^{-\omega t}\vec{j}.$$
  Vypočítejte jeho rychlost a zrychlení v čase $t = 2s$.
- Určete vektory rychlosti a zrychlení pohybu hmotného bodu, který je dán vektorovou funkcí $\vec{f}(t) = (t+1)\vec{i} + (t^2+4)\vec{j} + t\vec{k}$ a určete vektory rychlosti a zrychlení v čase $t = 3s$.
- Pohyb hmotného bodu je určen vektorovou funkcí
  $$\vec{f}(t) = \cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j}.$$
  Dokažte, že platí $\vec{f}''(t) + \omega^2\vec{f}'(t) = 0$.
  Vypočítejte rychlost a zrychlení hmotného bodu.

Vektorová funkce 2 a více proměnných

Je-li dána libovolná množina bodů $\Omega \subset \mathbb{E}_2$, pak
vektorovou funkcí dvou proměnných x, y nazýváme funkci, která každému bodu $(x, y) \in \Omega$ přiřadí jediný vektor

$$\vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y), R(x, y)) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} + R(x, y)\vec{k}.$$

Vektorovou funkcí tří proměnných x, y, z nazýváme funkci, která každému bodu $(x, y, z) \in \Omega, \Omega \subset \mathbb{E}_3$, přiřadí jediný vektor

$$\vec{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

Stručněji můžeme psát

$$\vec{f}(X) = P(X)\vec{i} + Q(X)\vec{j} + R(X)\vec{k},$$

kde $X = (x, y)$ pro funkci dvou proměnných,
resp. $X = (x, y, z)$ pro funkci tří proměnných.

Divergence a rotace vektorového pole

Nechť je vektorové pole určené vektorovou funkcí $\vec{f}(X) = (P(X),\ Q(X),\ R(X))$, kde funkce $P(X),\ Q(X),\ R(X)$ jsou spojitě diferencovatelné v $\Omega \subset \mathbb{E}_3$.

$$\text{divergence pole } \vec{f}: \quad \operatorname{div} \vec{f} = \nabla \vec{f} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Divergence vektorového pole je **skalární** pole. Pokud v každém bodě vektorového pole $\vec{f}$ platí div $\vec{f} = 0$, je toto pole **nezřídlové** (solenoidální).

$$\text{rotace pole } \vec{f}: \quad \operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Rotace vektorového pole je **vektorové** pole. Pokud v každém bodě vektorového pole $\vec{f}$ platí rot $\vec{f} = \vec{0}$, je toto pole **nevírové** (laminární).

Příklad. Vektorové pole rychlosti $\vec{v}(x, y, z)$ stacionárního proudění kapaliny.
Diveregence vektorového pole v bodě A je skalár, který určuje objemové množství kapaliny, které vyteče za jednotku času z jednotkového objemu v okolí bodu A, neboli vydatnost zřídla jednotkového objemu.
Rotace vektorového pole $\vec{v}$ v bodě A je vektor, jehož směr určuje osu, kolem které kapalina v malém okolí bodu A rotuje jako celek.

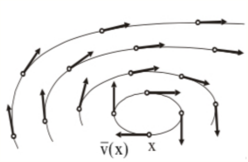
Potenciální pole

Jsou-li funkce P, Q, R vektorového pole $\vec{f}(X) = (P(X), Q(X), R(X))$ spojité v $\Omega \subset \mathbb{E}_3$ a $P\ dx + Q\ dy + R\ dz$ je totálním diferenciálem kmenové funkce $u(x, y, z)$, nazývá se funkce u potenciálem vektorového pole $\vec{f}$ a platí $\vec{f} = \text{grad}\ u(x, y, z)$. Vektorové pole $\vec{f}(X)$, které je gradientem nějakého skalárního pole u, se nazývá potenciálním (konzervativním) polem. **Pole je potenciální, právě když je nevírové.**

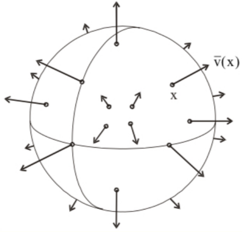
Skalární elektrostatické pole: skalární hladiny – ekvipotenciální plochy.

Gradient elektrostatického pole určuje potenciální vektorové pole, které charakterizuje intenzitu daného pole.

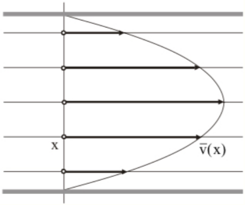
Vektorové pole lze ilustrovat vektorovými čarami – křivkami, jichž se $\vec{f}$ v každém bodě dotýká (siločáry, indukční čáry, proudnice).



obvodové rychlosti rotačního pohybu tuhého tělesa



centrální silové pole



rychlost laminárního proudění kapaliny

Příklady

- Vypočtěte divergenci a rotaci vektorového pole $\vec{f}$
  - $f(x, y, z) = (2x, 3y, 4z)$,
  - $f(x, y, z) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$,
  - $f(x, y, z) = (\sin y + z, x\cos y - z), 0)$,
  - $f(x, y, z) = \text{grad } (x^3 + y^3 + z^3)$.
- Rozhodněte, zda dané vektorové pole je nezřídlové, nevírové, potenciální.
  - $f(x, y, z) = (x + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$,
  - $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$,
  - $f(x, y, z) = (x, -z^2, y^2)$,
  - $f(x, y, z) = \text{grad}(xyz)$.
- Vypočítejte divergenci vektorového pole $\vec{f}(x, y, z) = (e^x yz, xe^y z, xye^z)$ v bodě $A = [1, 0, 0]$.
- Vypočítejte rotaci vektorového pole $\vec{f}(x, y, z) = (yze^x, xze^y, xye^z)$ v bodě $A = [1, 0, 0]$.
- Rozhodněte, zda dané vektorové pole je (ne)zřídlové, (ne)vírové. $\vec{f}(x, y, z) = (e^x yz, xe^y, xye^z)$
- Rozhodněte, zda dané vektorové pole je (ne)zřídlové, (ne)vírové. $\vec{f}(x, y, z) = \mathrm{grad}(\ln(x + y + z))$

Operace druhého řádu

Je dáno skalární pole $u(x, y, z)$ a vektorové pole $\vec{f} = (P, Q, R)$, funkce u, P, Q, R mají spojité parciální derivace 2. řádu. Operace gradient, rotace a divergence jsou operace 1. řádu.

- grad $u \to$ vektor
- div $\vec{f} \to$ skalár
- rot $\vec{f} \to$ vektor

Jestliže na jejich výsledky opět použijeme operace 1. řádu, dostaneme 5 operací druhého řádu

- div grad $u = \Delta u$ (Laplaceův operátor)
- rot grad $u = \vec{0}$
- div rot $\vec{f} = 0$
- grad div $\vec{f}$
- rot rot $\vec{f}$

Parciální derivace 2. řádu funkce $z = f(x, y)$

Parciální derivace 1. řádu: $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Parciální derivace 2. řádu – derivováním derivací 1. řádu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Jsou-li smíšené derivace spojité, jsou si rovny.

Příklad

$$f(x, y) = x^2 y + \frac{y^3}{x^4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \frac{4y^3}{x^5} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y + \frac{20y^3}{x^6} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x - \frac{12y^2}{x^5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{3y^2}{x^4} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x - \frac{12y^2}{x^5} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{6y}{x^4}$$

Derivace vyšších řádů

Příklad: $f(x,y) = y^2 \sin x.$ Určíme $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}$

Záleží na pořadí derivování? (Při jaké postačující podmínce?)

- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin x$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos x$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos x$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y \cos x$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = -y^2 \sin x$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y \cos x$
- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} - 2y \sin x$
- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} - 2y \sin x$
- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} - 2y \sin x$

- Kolik je parciálních derivací 3. řádu funkce 2 proměnných?
- Kolik z nich je (pro tuto funkci) různých?

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -y^2 \cos x \qquad \begin{matrix} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \end{matrix} = -2y \sin x \qquad \begin{matrix} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \end{matrix} = 2 \cos x \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0$$

Parciální derivace 2. řádu funkce $f(x, y, z)$ tří proměnných

Příklad: $f(x, y, z) = \arcsin y + (x^3 + y^2 + z)e^z$.

- Parciální derivace 1. řádu.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 e^z \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} + 2ye^z \quad \frac{\partial f}{\partial z} = (x^3 + y^2 + z + 1)e^z$$

- Parciální derivace 2. řádu.

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xe^z & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 3x^2 e^z \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{y}{\sqrt{(1 - y^2)^3}} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2ye^z \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 3x^2 e^z & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 2ye^z & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (x^3 + y^2 + z + 2)e^z
\end{array}$$

Taylorův polynom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$d^2f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

$$d^3f = d\left(d^2f\right)$$

Nechť funkce $f(x,y)$ má v okolí bodu $A = [x_0, y_0] \in \mathcal{D}(f)$ spojité parciální derivace do 3. řádu. Potom v bodě X z okolí bodu A platí

$$f(X) = T_2(X) + R_3(X)$$

$$T_2(X) = f(A) + df(A) + \frac{d^2f(A)}{2!} \qquad R_3(X) = \frac{d^3f(A+\xi(A-X))}{3!},$$

$dx = x - x_0,\ dy = y - y_0$ $\qquad \xi \in (0,1)$