Funkce více proměnných

Parciální derivace 1. řádu, diferenciál, tečná rovina a normála

Cvičení 4

Obsah

Geometrický význam derivace

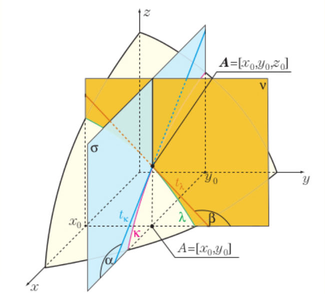
Funkce jedné proměnné.

Derivace funkce jedné proměnné v daném bodě (x_0) je směrnice tečny ke grafu funkce jedné proměnné v tomto bodě $([x_0, f(x_0)])$.

Funkce dvou proměnných.

$\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ je směrnice tečny v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ **řezu plochy** $z = f(x, y)$ **rovinou** $y = y_0$ rovnoběžnou s rovinou (xz).

$\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ je směrnice tečny v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ **řezu plochy** $z = f(x, y)$ **rovinou** $x = x_0$ rovnoběžnou s rovinou (yz).



Rozlišujeme bod z definičního oboru a bod na grafu funkce.

Diferencovatelnost funkce

Definice (J.Neustupa, Matematika II, str. 26)

Funkce $z = f(x, y)$ je **v bodě** $A = [x_0, y_0] \in \mathcal{D}(f)$ **diferencovatelná**, jestliže k ploše $z = f(x, y)$ v bodě plochy $[x_0, y_0, f(x_0)]$ **existuje tečná rovina** popsaná

$$z = L(x, y), \quad L(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

která není rovnoběžná s osou y,

pro kterou platí

$$\lim_{X \to A} \frac{f(x, y) - L(x, y)}{\|X - A\|} = 0$$

(limita zaručuje jednoznačnost koeficientů a, b a jednoznačnost roviny)

Funkce $z = f(x, y)$ je **v bodě** $A = [x_0, y_0] \in \mathcal{D}(f)$ **diferencovatelná**, existuje-li **lineární funkce** $L(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$ taková, že $\lim_{X \to A} \frac{f(x, y) - L(x, y)}{\|X - A\|} = 0$

Diferencovatelnost a spojitost

Věta Je-li funkce v bodě A diferencovatelná, má v bodě A parciální derivace 1.řádu a pro koeficienty a, b $L(x,y) = f(A) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$

platí: $a = \dfrac{\partial f(A)}{\partial x}$, $b = \dfrac{\partial f(A)}{\partial y}$

Věta Jsou-li **parciální derivace** 1.řádu **spojité** v bodě A, je **funkce** v bodě A **diferencovatelná**.

Věta Je-li funkce v bodě A diferencovatelná, je v tomto bodě spojitá.

Funkce je **diferencovatelná** v množině $M \subset \mathbb{E}_2$, je-li diferencovatelná v každém bodě množiny M.

Funkce je **diferencovatelná**, je-li diferencovatelná v každém bodě definičního oboru.

Tečná rovina a normála, diferenciál

Nechť funkce $z = f(x, y)$ je diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{E}_2$.

Tečnou rovinou ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě dotyku (bod na grafu funkce) $P = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$ nazýváme množinu bodů v $\mathbb{E}_3$:

$$\tau : z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Normálový vektor tečné roviny: $\vec{n} = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x},\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},\ -1 \right)$.

Normála grafu funkce f v bodě P je přímka, která je kolmá k tečné rovině a prochází bodem P, tj. směrovým vektorem normály je vektor $\vec{n}$.

Parametrické rovnice normály jsou:

$$X = P + \vec{n} \cdot t, \quad \text{tj.} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Diferenciál funkce f v bodě A

$$\mathrm{d}f(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(A)}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Příklady

1. Najděte rovnici tečné roviny τ a normály n grafu funkce $f(x,y) = 2x^2 - 4y^2$ v bodě $T = [2,1,?]$.
   Vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v bodě $[2.2, 1.3]$.

2. Najděte rovnici tečné roviny τ a normály n grafu funkce $f(x,y) = \frac{1}{x}\arcsin(y)$ v bodě $T = [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, ?]$.

3. Najděte rovnici tečné roviny τ plochy $z = x^2 + xy - y^2 + x + 3$ rovnoběžné s danou rovinou $\rho:\ 5x - 3y - z = 0$.

Příklady (**96,97,101-107**) ve sbírce (ÚTM):

`https://mat.nipax.cz/_media/diferencialni_pocet-cast_2.pdf`

Diferenciál: použití a geometrický význam

Definice Je-li funkce diferencovatelná, nazývá se výraz

$$dz = df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

totální diferenciál funkce $z = f(x, y)$

Diferenciál funkce f v bodě A

$$\mathrm{d}f(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(A)}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Diferenciál lze použít například k **přibližnému výpočtu hodnot funkce**:

$$f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f(x_0, y_0)$$

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Geometrický význam: Totální diferenciál funkce dvou proměnných je **přírůstek měřený na tečné rovině**.
Příklady (**92-95, 98-100**) ve sbírce (ÚTM):

`https://mat.nipax.cz/_media/diferencialni_pocet-cast_2.pdf`

Příklady – použití diferenciálu

Příklad 1. O kolik se (přibližně) změní plocha a úhlopříčka obdélníka o stranách délek $x = 6m$, $y = 8m$, jestliže se strana x zvětší o $2mm$ a strana y zmenší o $5mm$?

Plocha $p(x, y) = xy$, $\quad p(6, 8) = 48$, $\quad \Delta p \doteq dp$

$p(6 + \Delta x, 8 + \Delta y) = p(6 + 2 \cdot 10^{-3},\ 8 - 5 \cdot 10^{-3}) \doteq p(6, 8) + dp(6, 8)$

$$dp(6,8) = \underbrace{8}_{\frac{\partial p(6,8)}{\partial x}} \underbrace{(6 + 2 \cdot 10^{-3} - 6)}_{dx} + \underbrace{6}_{\frac{\partial p(6,8)}{\partial y}} \underbrace{(8 - 5 \cdot 10^{-3} - 8)}_{dy} = -140[cm^2]$$

Úhlopříčka $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad u(6, 8) = \sqrt{36 + 48} = 10$, $\quad \Delta u \doteq du$

$du(6, 8) = \frac{6}{10}(2 \cdot 10^{-3}) - \frac{8}{10}(5 \cdot 10^{-3}) = 28 \cdot 10^{-4}[m]$

Příklad 2. Měřením poloměru podstavy r a výšky h válce se získaly následující výsledky: $r = 2,5m \pm 0,1m$, $\quad h = 4,0m \pm 0,2m$.
S jakou absolutní chybou a jakou relativní chybou lze vypočítat objem válce?

Příklad 3. Strany trojúhelníka mají rozměry
$a = 200m \pm 2m, B = 300m \pm 5m$ a úhel mezi nimi je roven $\gamma = 60^\circ \pm 1^\circ$.
S jakou absolutní chybou lze spočítat délku 3. strany?

Taylorův polynom 1. stupně

Se středem v bodě A,

- funkce jedné proměnné : $A = x_0$ *(připomenutí)*

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$$

- funkce dvou proměnných: $A = [x_0, y_0]$

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)}_{\mathrm{d}f(x_0, y_0)}$$

$$T_1(x, y) = f(A) + \mathrm{d}f(A)$$

Diferencovatelnost, diferenciál, tečná rovina - příklad

$$f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2, \quad A = [-1,1]$$

1. definiční obor $D(f) = \mathbb{R}^2$, $f(x,y)$ je spojitá v $\mathbb{R}^2$.
2. derivace 1. řádu: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2x - 6y$, parciální derivace jsou spojité v $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ funkce f je diferencovatelná v $\mathbb{R}^2$
3. derivace 1. řádu v bodě A: $\dfrac{\partial f(A)}{\partial x} = -4$, $\dfrac{\partial f(A)}{\partial y} = -4$
4. diferenciál: $df = (2x - 2y)dx + (-2x - 6y)dy$
   v bodě A: $df(A) = -4dx - 4dy$
5. rovnice tečné roviny v bodě $[-1, 1, f(-1,1)] = [-1,1,0]$:
   $\tau : z = -4(x+1) - 4(y-1)$
6. Taylorův polynom 1. stupně se středem v bodě A:
   $T_1(x,y) = -4(x+1) - 4(x-1)$
7. přibližná hodnota funkce v bodě $[-1.1, 1.2]$:
   $f(-1.1,\ 1.2) \doteq T_1(-1.1,\ 1.2) = -4(-0.1) - 4(0.2) = -0.4$