

Funkce více proměnných

Limita a spojitost, parciální derivace 1. řádu
diferenciál, tečná rovina a normála
gradient, derivace ve směru

Cvičení 3, 4, 5

Obsah

- 1 Vrstevnice(izokřivky)
- 2 Limita a spojitost
- 3 Derivace, diferencovatelnost, diferenciál
- 4 Tečná rovina a normála, diferenciál
- 5 Taylorův polynom 1.stupně
- 6 Gradient, derivace ve směru
- 7 Shrnutí (derivace 1. řádu)

Vrstevnice, vrstevnicový graf funkce 2 proměnných

Vrstevnicí plochy $z = f(x, y)$ rozumíme množinu bodů v rovině, kterým funkce $z = f(x, y)$ přiřazuje stejnou funkční hodnotu.

Rovnice vrstevnice: $f(x, y) = C$

Ve fyzice je rovnicí $f(x, y, z) = C$ je určena **skalární hladina** skalárního pole (izobara, izoterma)

Příklad

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

- ❶ Definiční obor: $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$

Kruh se středem v $[0, 0]$ a poloměrem 4.

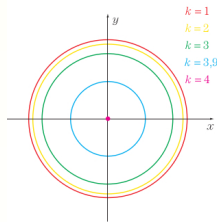
- ❷ Vrstevnice: $z = C, C \in \langle 0, 4 \rangle$, například

$$z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$$

$$z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 15$$

$\vdots$

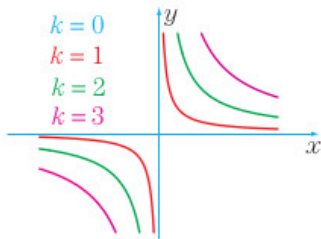
$$z = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$$



Příklad

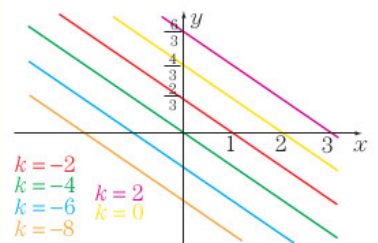
Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce

$$z = \sqrt{xy}$$



Příklad

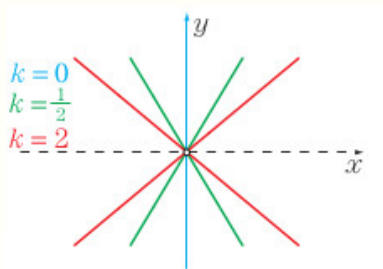
$$z = 2x + 3y - 4$$



Příklad

Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce

$$z = \frac{2x^2}{y^2}$$



Pojmy (z přednášky)

Body $A, X, Y \in \mathbb{E}_n$

- **Vzdálenost** bodů $X = [x_1, \dots, x_n]$ a $Y = [y_1, \dots, y_n]$

$$\|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

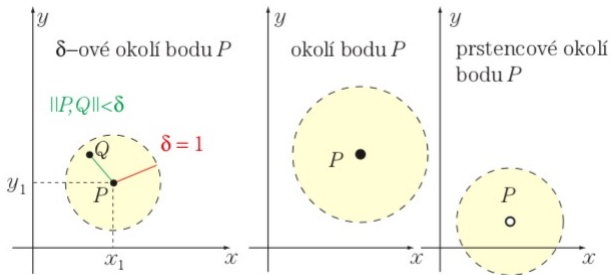
- Okolí bodu $\mathcal{U}(A)$, R -okolí (δ -okolí bodu) $\mathcal{U}_R(A)$ ($\mathcal{U}_\delta(A)$),
prstencové okolí bodu $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}_R(A)$, $\mathcal{P}_\delta(A)$.
- Vniřní bod množiny, hraniční bod množiny.
- Hromadný bod množiny, izolovaný bod množiny.
- **Limita posloupnosti** $\{X_k\}_{k=1}^\infty \text{ v } \mathbb{E}_n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\|X_k - A\|}_{\text{posloupnost vzdáleností}} = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} X_k = A$$

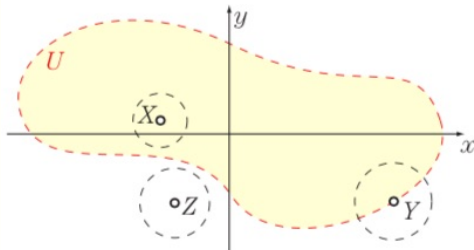
- Limitu posloupnosti bodů $\{X_k\}$ lze počítat "po souřadnicích".

$$\{X_k\} = \left[\frac{\sin k}{k}, \frac{3k^2 + 2k}{1 - 4k^2}, \frac{k + 2}{k^2} \right] : \quad \lim_{k \rightarrow \infty} X_k = \left[0, -\frac{3}{4}, 0 \right]$$

Okolí bodu a hromadný bod



Okolí bodu:



Hromadný bod

Limita a spojitost

Limita funkce $f(X)$ v bodě $X_0 \in \mathbb{E}_n$ je $a \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall X \in \mathcal{P}_\delta(X_0) : |f(X) - a| < \varepsilon$$

Jiná definice (skripta): $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = a$ (vzhledem k množině M)

jestliže pro každou posloupnost bodů $\{X_k\}$ v prstencovém okolí $\mathcal{P}(X_0) \subset \mathcal{D}(f)$ (resp. $P(X_0) \cap M \in \mathcal{D}(f)$) platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(X_k) = a$$

Věta Funkce může mít v bodě X_0 nejvýše jednu limitu.

Věta O "aritmetice" limit.

O limitách funkcí n proměnných platí analogické věty jako pro limity funkce jedné proměnné.

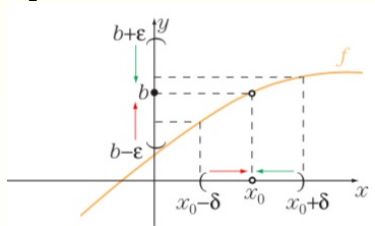
Funkce $y = f(X)$ je spojitá v bodě $X_0 \in D(f) \Leftrightarrow$

① **existuje** $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X)$ a

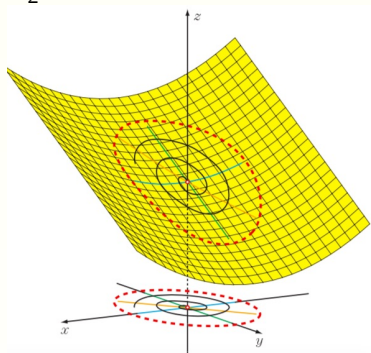
② $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0)$

Ilustrace pojmu $X \rightarrow X_0$ v $\mathbb{E}_1$ a $\mathbb{E}_2$

$\mathbb{E}_1$:



$\mathbb{E}_2$:



Limity: příklady

Příklad

$$\lim_{\substack{x \rightarrow [0,0] \\ x \neq 0, y \neq 0}} \frac{\sin xy}{xy} \left| \begin{array}{l} \text{označíme } u = xy \\ \text{pro } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Příklad (limita neexistuje)

$$\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ x \neq -y}} \frac{x-y}{x+y} \left| \begin{array}{l} \text{po přímce } y = x \\ \text{pro } x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = x}} \frac{x-x}{x+x} = 0$$

$$\text{ALE} \left| \begin{array}{l} \text{ale po} \\ \text{přímce } y = 2x \end{array} \right| \lim_{x \rightarrow [0,0]} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2x}{x+2x} = -\frac{1}{3}$$

Často bývá vhodná transformace do polárních souřadnic:

$$x = r \cos t \quad y = r \sin t$$

Dostaneme-li výsledek **nezávislý** na t , limita existuje.

O **neexistenci limity** se můžeme přesvědčit například tak, že najdeme dvě různé hodnoty pro dvě různé "cesty", po kterých se blížíme k bodu X_0 . (např. $y = kx, y = kx^2 \dots$)

Ale dostaneme-li na **dvou** cestách do bodu X_0 stejné limity, **nemůžeme o existenci limity dělat žádný závěr.**

Parciální derivace

Definice

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ parciální derivaci (prvého řádu) **podle x** , jestliže existuje (vlastní) limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ parciální derivaci (prvého řádu) **podle y** , jestliže existuje (vlastní) limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Poznámka

Při výpočtu parciální derivace funkce n proměnných postupujeme tak, že $n - 1$ proměnných považujeme za konstanty a derivujeme obvyklým způsobem (**podle stejných pravidel**) funkce jedné proměnné.

$$\text{Značení: } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \quad \underbrace{\frac{\partial f(A)}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_A}_{\text{derivace v bodě}}$$

Pro definiční obor platí: $\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \subset \mathcal{D}(f)$

Příklady

$$\textcircled{1} \quad f(x, y) = x^4 y^5 + 5x^3 + 6y^2, A = [1, 1]$$

$$\textcircled{2} \quad f(x, y) = x^2 \ln y + y \sin x \cos^2 x$$

$$\textcircled{3} \quad f(x, y) = (2x - 5y)^4$$

$$\textcircled{4} \quad f(x, y) = 5x^4 y^2 + \frac{x}{y} + 2x^2 3y$$

$$\textcircled{5} \quad f(x, y) = y^{x^2+3}, y > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^{x^2+3} \cdot \ln(y) \cdot 2x$$

$$\textcircled{6} \quad f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

Příklady (**71 - 90**) ve sbírce (ÚTM):

https://mat.nipax.cz/_media/definicni_obory.pdf

Diferencovatelnost funkce

Definice

(J.Neustupa, Matematika II, str. 26)

Funkce $z = f(x, y)$ je **v bodě** $A = [x_0, y_0] \in \mathcal{D}(f)$ **diferencovatelná**,
jestliže k ploše $z = f(x, y)$ v bodě plochy $[x_0, y_0, f(x_0)]$
existuje tečná rovina popsaná

$$z = L(x, y), \quad L(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

která není rovnoběžná s osou y ,

pro kterou platí

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(x, y) - L(x, y)}{\|X - A\|}$$

(limita zaručuje jednoznačnost koeficientů a, b a jednoznačnost roviny)

Funkce $z = f(x, y)$ je **v bodě** $A = [x_0, y_0] \in \mathcal{D}(f)$ **diferencovatelná**,
existuje-li lineární funkce $L(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$
taková, že $\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(x, y) - L(x, y)}{\|X - A\|}$

Diferencovatelnost a spojitost

Věta Je-li funkce v bodě A diferencovatelná, má v bodě A parciální derivace 1.řádu a pro koeficienty a, b $L(x, y) = f(A) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$

$$\text{platí: } a = \frac{\partial f(A)}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial f(A)}{\partial y}$$

Věta Jsou-li **parciální derivace** 1.řádu **spojité** v bodě A , je **funkce** v bodě A **diferencovatelná**.

Věta Je-li funkce v bodě A diferencovatelná, je v tomto bodě spojitá.

Funkce je **diferencovatelná** v množině $M \subset \mathbb{E}_2$, je-li diferencovatelná v každém bodě množiny M .

Funkce je **diferencovatelná**, je-li diferencovatelná v každém bodě definičního oboru.

Tečná rovina a normála, diferenciál

Nechť funkce $z = f(x, y)$ je diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{E}_2$.

Tečnou rovinou ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě dotyku (bod na grafu funkce) $P = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$ nazýváme množinu bodů v $\mathbb{E}_3$:

$$\tau : z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Normálový vektor tečné roviny: $\vec{n} = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1 \right)$.

Normála grafu funkce f v bodě P je přímka, která je kolmá k tečné rovině a prochází bodem P , tj. směrovým vektorem normály je vektor $\vec{n}$.

Parametrické rovnice normály jsou:

$$X = P + \vec{n} \cdot t, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Diferenciál funkce f v bodě A

$$df(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(A)}{\partial y} dy$$

Příklady

- 1 Najděte rovnici tečné roviny τ a normály n grafu funkce $f(x, y) = 2x^2 - 4y^2$ v bodě $T = [2, 1, ?]$.
Vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v bodě $[2.2, 1.3]$.
- 2 Najděte rovnici tečné roviny τ a normály n grafu funkce $f(x, y) = \frac{1}{x} \arcsin(y)$ v bodě $T = [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, ?]$.
- 3 Najděte rovnici tečné roviny τ plochy $z = x^2 + xy - y^2 + x + 3$ rovnoběžné s danou rovinou $\rho : 5x - 3y - z = 0$.

Příklady (**96,97,101-107**) ve sbírce (ÚTM):

https://mat.nipax.cz/_media/diferencialni_pocet-cast_2.pdf

Diferenciál: použití a geometrický význam

Definice Je-li funkce diferencovatelná, nazývá se výraz

$$dz = df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

totální diferenciál funkce $z = f(x, y)$

Diferenciál funkce f v bodě A

$$df(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(A)}{\partial y} dy$$

Diferenciál lze použít například k **přibližnému výpočtu hodnot funkce**:

$$f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$$
$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy$$

Geometrický význam: Totální diferenciál funkce dvou proměnných je **přírůstek měřený na tečné rovině**.

Příklady (**92-95, 98-100**) ve sbírce (ÚTM):

https://mat.nipax.cz/_media/diferencialni_pocet-cast_2.pdf

Příklady – použití diferenciálu

Příklad 1. O kolik se (přibližně) změní plocha a úhlopříčka obdélníka o stranách délek $x = 6m$, $y = 8m$, jestliže se strana x zvětší o $2mm$ a strana y zmenší o $5mm$?

Plocha $p(x, y) = xy$, $p(6, 8) = 48$, $\Delta p \doteq dp$
 $p(6 + \Delta x, 8 + \Delta y) = p(6 + 2 \cdot 10^{-3}, 8 - 5 \cdot 10^{-3}) \doteq p(6, 8) + dp(6, 8)$

$$dp(6, 8) = \underbrace{\frac{\partial p(6, 8)}{\partial x}}_8 \underbrace{(6 + 2 \cdot 10^{-3} - 6)}_{dx} + \underbrace{\frac{\partial p(6, 8)}{\partial y}}_6 \underbrace{(8 - 5 \cdot 10^{-3} - 8)}_{dy} = -140[cm^2]$$

Úhlopříčka $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $u(6, 8) = \sqrt{36 + 48} = 10$, $\Delta u \doteq du$
 $du(6, 8) = \frac{6}{10}(2 \cdot 10^{-3}) - \frac{8}{10}(5 \cdot 10^{-3}) = 28 \cdot 10^{-4}[m]$

Příklad 2. Měřením poloměru podstavy r a výšky h válce se získaly následující výsledky: $r = 2,5m \pm 0,1m$, $h = 4,0m \pm 0,2m$.
S jakou absolutní chybou a jakou relativní chybou lze vypočítat objem válce?

Příklad 3. Strany trojúhelníka mají rozměry $a = 200m \pm 2m$, $B = 300m \pm 5m$ a úhel mezi nimi je roven $\gamma = 60^\circ \pm 1^\circ$.
S jakou absolutní chybou lze spočítat délku 3. strany?

Taylorův polynom 1. stupně

Se středem v bodě A ,

- funkce jedné proměnné : $A = x_0$ (připomenutí)

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$$

- funkce dvou proměnných: $A = [x_0, y_0]$

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)}_{df(x_0, y_0)}$$

$$T_1(x, y) = f(A) + df(A)$$

Diferencovatelnost, diferenciál, tečná rovina - příklad

$$f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2, \quad A = [-1, 1]$$

- ❶ definiční obor $D(f) = \mathbb{R}^2$, $f(x, y)$ je spojitá v $\mathbb{R}^2$.
- ❷ derivace 1. řádu: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 6y$, parciální derivace jsou spojité v $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ funkce f je diferencovatelná v $\mathbb{R}^2$
- ❸ derivace 1. řádu v bodě A : $\frac{\partial f(A)}{\partial x} = -4$, $\frac{\partial f(A)}{\partial y} = -4$
- ❹ diferenciál: $df = (2x - 2y)dx + (-2x - 6y)dy$
v bodě A : $df(A) = -4dx - 4dy$
- ❺ rovnice tečné roviny v bodě $[-1, 1, f(-1, 1)] = [-1, 1, 0]$:
 $\tau : z = -4(x + 1) - 4(y - 1)$
- ❻ Taylorův polynom 1. stupně se středem v bodě A :
 $T_1(x, y) = -4(x + 1) - 4(y - 1)$
- ❼ přibližná hodnota funkce v bodě $[-1.1, 1.2]$:
 $f(-1.1, 1.2) \doteq T_1(-1.1, 1.2) = -4(-0.1) - 4(0.2) = -0.4$

Gradient, derivace ve směru

Gradient funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Gradient funkce v bodě určuje **směr největšího růstu** (největší spád) funkce v tomto bodě. Pro diferencovatelnou funkci je

derivace funkce (skalárního pole) f v bodě A ve směru $\vec{s}$

$$\frac{df(A)}{d\vec{s}} = \frac{\boxed{\text{grad } f(A) \cdot \vec{s}}}{|\vec{s}|} = \frac{\frac{\partial f(A)}{\partial x_1} \cdot s_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_2} \cdot s_2 + \dots + \frac{\partial f(A)}{\partial x_n} \cdot s_n}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2}}$$

Derivace skalárního pole $f(x, y, z)$ v bodě A ve směru $\vec{s}$ určuje přírůstek skalárního pole $f(x, y, z)$ v bodě A ve směru vektoru $\vec{s}$ neboli **rychlost růstu** skalárního pole $f(x, y, z)$ v bodě A ve směru vektoru $\vec{s}$.

Vlastnosti gradientu

- Gradient skalárního pole $f(x, y, z)$ je v každém bodě kolmý k hladině tímto bodem procházející.
- Ve směru gradientu roste skalární pole $f(x, y, z)$ nejrychleji, ve směru opačném nejrychleji klesá.
- Maximální rychlost růstu skalárního pole $f(x, y, z)$ má velikost $v = |\text{grad } f|$.

Příklady

- 1 Určete úhel mezi gradienty daných funkcí v bodě A
 $f(x, y, z) = xy + yz,$
 $g(x, y, z) = \sin(xz) + x + y - zy - 1, \quad A = [1, 1, 0]$
- 2 Určete, ve kterých bodech z $D(f) = \mathbb{E}_3$ je gradient funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ roven nulovému vektoru.

Příklad

Vypočítejte derivaci funkce $f(x, y, z) = 3x^2 - 4y^3 + 2z^4$ v bodě $A = [1, 2, 1]$ ve směru $\vec{s} = (3, 4, 5)$.

❶ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x, \frac{\partial f}{\partial y} = -12y^2, \frac{\partial f}{\partial z} = 8z^3$

❷ parciální derivace v bodě A
 $\frac{\partial f(A)}{\partial x} = 6, \frac{\partial f(A)}{\partial y} = -48, \frac{\partial f(A)}{\partial z} = 8$

❸ gradient $\text{grad } f(A) = (6, -48, 8)$

❹ $\frac{df(A)}{d\vec{s}} = \frac{(6, -48, 8) \cdot (3, 4, 5)}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = -\frac{134}{\sqrt{50}} = -\frac{134}{5\sqrt{2}}$

Příklady (**127-154**) ve sbírce (ÚTM):

https://mat.nipax.cz/_media/diferencialni_pocet-cast_2.pdf

Shrnutí (derivace 1. řádu)

Známe-li parciální derivace 1.řádu funkce dvou proměnných $g(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$, můžeme určit:

- rovnici tečné roviny ke grafu funkce v bodě dotyku $[x_0, y_0, z_0]$

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

jejíž normálový vektor $\vec{n} = \left(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}, -1 \right)$

- parametrické vyjádření normály

$$p : X = [x_0, y_0, z_0] + t\vec{n}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Taylorův polynom 1. stupně

$$T_1(x, y) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

- diferenciál funkce v bodě $[x_0, y_0]$

$$dg(x_0, y_0) = \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}dy$$

- gradient

$$\text{grad } g(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \right)$$

- derivaci funkce $g(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ ve směru $\vec{s}$

$$\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial \vec{s}} = \text{grad } g(x_0, y_0) \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}$$

Příklady

Příklady (**155-159**) ve sbírce (ÚTM):

https://mat.nipax.cz/_media/diferencialni_pocet-cast_2.pdf