Funkce více proměnných

Definiční obor

12. února 2020

Funkce více proměnných

Definice

Necht' $M \subseteq \mathbb{R}^n, \ M \neq \emptyset$.

Funkcí více proměnných budeme rozumět každé zobrazení

$$f : M \to \mathbb{R}$$

Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a značíme D_f resp. $D(f)$.

$\mathbb{R}^n$ je kartézský součin $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \mathbb{R}}_{n \text{ krát}}$.

Zobrazení f přiřazuje každé uspořádané n-tici $X = (x_1, \ldots, x_n)$ reálných čísel z množiny M **jediné** reálné číslo y, proto mluvíme o **reálné funkci** n **reálných proměnných**. Zapisujeme $y = f(X)$.

Pro $n = 2$ *zpravidla* používáme zápis $z = f(x, y)$, pro $n = 3: \ u = f(x, y, z)$.

Příklady:

fyzika: $u = f(x, y, z)$ popisuje **skalární pole** skalární veličiny.

objem válce: $V = f(r, h): \ V = \pi \cdot r^2 \cdot h$,

objem kvádru : $V = f(a, b, c): \ V = a \cdot b \cdot c$

Interval a oblast

- Při zkoumání funkce **jedné proměnné** jsme pracovali s množinou $M \subseteq \mathbb{R}$, nejčastěji s **interval**em.
- Funkce **více (n) proměnných**: množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Bod $P \in M$ je **vnitřním bodem** množiny M, jestliže existuje takové okolí bodu P, které celé patří do M.
- Množinu M, jejíž každý bod je jejím vnitřním bodem, nazveme **otevřenou množinou**.
- Otevřenou množinu M, jejíž každé dva body lze spojit lomenou čarou, která celá leží v M nazveme **souvislou**.
- **Otevřenou souvislou množinu nazveme oblastí**.
- **Uzavřená oblast** je oblast s přidanými hromadnými body, které do ní nepatří (oblast a její hranice).

Definiční obor

Není-li zadán definiční obor, pak se jím rozumí maximální "přípustná" podmnožina v $\mathbb{R}^n$, tj. množina bodů, ve kterých má daná funkce smysl, ve kterých existuje funkční hodnota.

Příklad $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$

Podmínky pro definiční obor:

1. jmenovatel nesmí být nula: $y \neq 0$
2. pro arcsin v musí platit $-1 \leq v \leq 1$
3. pro $\dfrac{x}{y^2}$: $-1 \leq \dfrac{x}{y^2} \leq 1 \Rightarrow -y^2 \leq x \leq y^2$
4. pro $1-y$: $-1 \leq 1-y \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq y \leq 2$

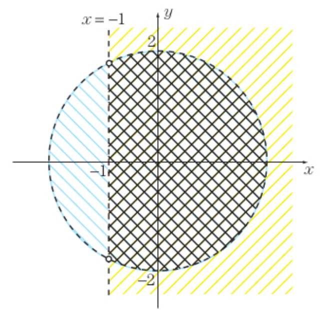
Podmínky 1, 3, 4 musí platit zároveň.
Tedy funkce má smysl v části roviny omezené přímkou $y = 2$, parabolami $y^2 = x$ a $-y^2 = x$ včetně hranice s vyjmutím počátku.
$D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y \in (0, 2\rangle \wedge x \leq y^2 \wedge x \leq -y^2\}$

Definiční obor a jeho náčrt

Příklad $z = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

Podmínky pro definiční obor:

1. jmenovatel nesmí být nula
2. **sudá** odmocnina je definovaná pouze pro **nezáporné** hodnoty
3. logaritmus je definovaný pouze pro **kladné** hodnoty

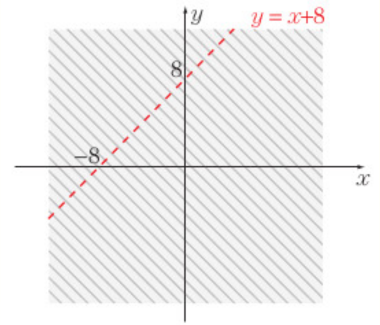


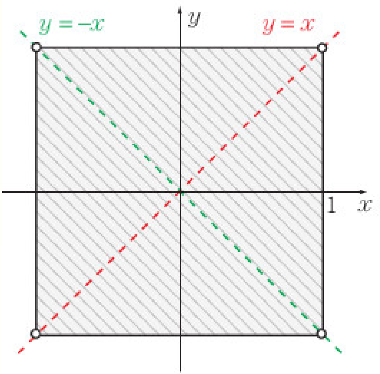
Příklady

Popište a načrtněte množinu, kde je funkce $z = f(x, y)$ definovaná.
1.

a) $z = \dfrac{x + y - 5}{x - y + 8}$

b) $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2} + \arcsin x + \arccos y$

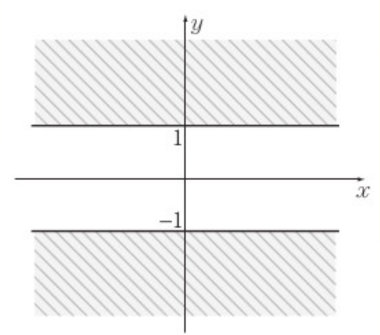




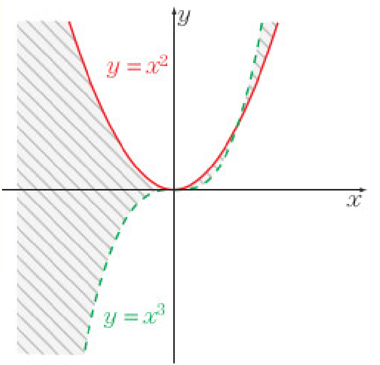
Příklad

2.

a) $z = \sqrt{y^2 - 1}$



b) $z = \sqrt{\dfrac{y - x^2}{x^3 - y}}$



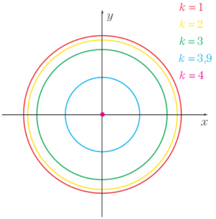
Vrstevnice, vrstevnicový graf funkce 2 proměnných

Vrstevnicí plochy $z = f(x, y)$ rozumíme množinu bodů v rovině, kterým funkce $z = f(x, y)$ přiřazuje stejnou funkční hodnotu.
Rovnice vrstevnice: $f(x, y) = C$
Ve fyzice je rovnicí $f(x, y, z) = C$ je určena **skalární hladina** skalárního pole (izobara, izoterma)
Příklad

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

1. Definiční obor: $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$
   Kruh se středem v $[0, 0]$ a poloměrem 4.
2. Vrstevnice: $z = C, C \in \langle 0,\ 4 \rangle$, například

$$\begin{aligned} z = 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 16 \\ z = 1 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 15 \\ &\vdots \\ z = 4 &\Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \end{aligned}$$

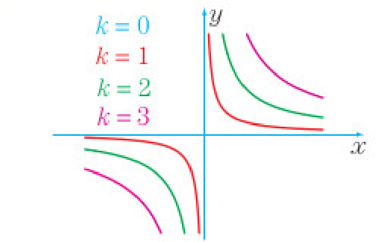


Příklady

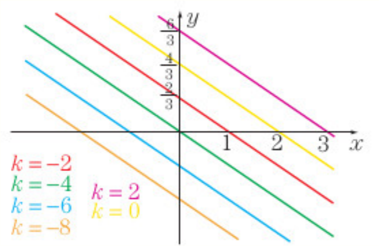
Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce

1.

$$z = \sqrt{xy}$$

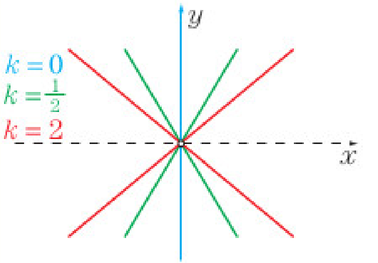


$$z = 2x + 3y - 4$$



Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce

$$z = \frac{2x^2}{y^2}$$



Příklady

Zapište a **načrtněte** množinu bodů v $\mathbb{E}_2$, která tvoří definiční obor zadané funkce $z = f(x, y)$

1. $z = x + \sqrt{y}$
2. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$
3. a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ b) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$
4. $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$
5. $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$
6. a) $z = \ln(-x - y)$ b) $z = \ln(x + y)$
7. $z = \arcsin \dfrac{y}{x}$
8. $z = \arccos \dfrac{x}{x + y}$
9. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x - y}{1 + x^2 y^2}$