

Dvojný integrál

Cvičení 10

S A M O S T U D I U M

teorie: skripta J. NEUSTUPA, Matematika II, vydání r. 2016, str. 50-57

Příklady v elektronické sbírce jsou uvedeny níže.

Dvojný integrál v KARTÉZSKÝCH souřadnicích

$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ Integrál počítáme převedením na dvojnásobný – dvojnásobnou integrací funkce jedné proměnné.

Oblast D je **OBDÉLNÍK** (strany rovnoběžné s osami)

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ c &\leq y \leq d \end{aligned}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

POUZE v tomto případě nezáleží na pořadí výpočtu.

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

Příklady

❶ $\iint_D (x + 3) \, dx \, dy$ $D = \{[x, y] : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 2 \rangle\}$

❷ $\iint_D xye^{xy^2} \, dx \, dy$ $D = \{[x, y] : x \in \langle 0, \ln 2 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle\}$

Příklady

$$\textcircled{1} \iint_D \frac{y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}} \, dx dy, \quad D = \{[x, y] : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

$$\textcircled{2} \iint_D x^2 y e^{xy} \, dx dy \quad D = \{[x, y] : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 2 \rangle\}$$

$$\textcircled{3} \iint_D x^2 y \cos(xy^2) \, dx dy, \quad D = \{[x, y] : x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, y \in \langle 0, 2 \rangle\}$$

Oblast D je OBDÉLNÍK a $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

POUZE v tomto případě lze počítat:

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) \, dx dy = \int_a^b f_1(x) \, dx \cdot \int_c^d f_2(y) \, dy$$

Příklady

$$\textcircled{1} \int_0^2 \int_0^1 (x+3) \, dx dy = \int_0^2 dy \cdot \int_0^1 (x+3) \, dx$$

$$\textcircled{2} \iint_D e^{2x+3y} \, dx dy, \quad D = \{[x, y] : x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 2 \rangle\}$$

$$\textcircled{3} \iint_D x^2 y \, dx dy, \quad D = \{[x, y] : x \in \langle 0, 2 \rangle, y \in \langle 1, 2 \rangle\}$$

Obecná rovinná oblast. Elementární obor integrace v $\mathbb{E}_2$

(skripta, str.56)

Nechť funkce $y = g_1(x)$ a $y = g_2(x)$ jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$

a $g_1(x) \leq g_2(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$.

Pak množinu

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :$$

$$a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

nazýváme

elementárním oborem integrace
vzhledem k ose x .

Nechť funkce $x = h_1(y)$ a $x = h_2(y)$ jsou spojité na intervalu $\langle c, d \rangle$

a $h_1(y) \leq h_2(y)$ pro všechna $y \in \langle c, d \rangle$.

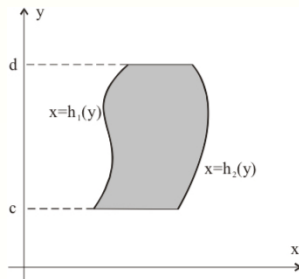
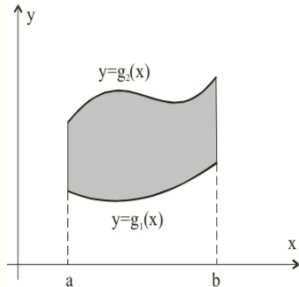
Pak množinu

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 :$$

$$c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

nazýváme

elementárním oborem integrace
vzhledem k ose y .



Fubiniho věta: skripta, str. 57

Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose x . (EOI _{x})

Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v M . Potom platí:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose y . (EOI _{y})

Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v M . Potom platí:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Oblast D je nutné zapsat jako EOI vzhledem k ose x nebo k ose y .
Teprve potom lze dvojný integrál převést na dvojnásobný.

Vnější meze musí být konstantní!

Nejdříve určíme vnitřní integrál, potom vnější.

Příklady

Určit meze integrace $\iint_D f(x, y) \, dx dy$

- ① D je trojúhelník ABC : $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [0, a]$
- ② D je trojúhelník ohraničený: $y = 1$, $y = x + 4$, $y = 6 - x$
- ③ D je čtyřúhelník
 $A = [0, 0]$, $B = [1, 2]$, $C = [3, 1]$, $D = [2, -2]$
- ④ D je ohraničena křivkami: $y = x^2$, $y^2 = x$

Záměna pořadí integrace.

Přechod od zápisu dvojnásobného integrálu ve tvaru

$$\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \quad \text{do tvaru} \quad \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Příklady

- ① $\int_0^1 \int_0^2 f(x, y) \, dy dx + \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) \, dy dx$
- ② $\int_0^2 \int_1^{e^y} f(x, y) \, dx dy$

Příklady

https://mat.nipax.cz/_media/dvojny_integral.pdf

261 – 276