Globální (absolutní) extrémy

Definice: Nechť $M \subset \mathcal{D}(f)$ a $x_0 \in M$.
Funkce f nabývá **na množině** M **globálního maxima** (resp. **globálního minima**) v bodě x_0, jestliže pro všechna $x \in M$ platí

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{resp.} \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Spojitá funkce na **uzavřeném a omezeném intervalu** $\langle a, b \rangle$ **nabývá** absolutních extrémů. Extrémy mohou být:
v bodě lokálního extrému na (a, b) nebo v krajních bodech a, b.

Příklad:
$y = 1 - \sqrt[5]{(x^2+2x)^4} = 1 - (x^2+2x)^{\frac{4}{5}}$, na intervalu $\langle -1,\ 2 \rangle$.
Stacionární body:

$$y' = 0 : \quad \tfrac{4}{5}(x^2+2x)^{-\frac{1}{5}} \cdot (2x+2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$$

Derivace neexistuje (jmenovatel $= 0$), ale funkce je definovaná:

$$x_1 = 0 \in \langle -1,\ 2 \rangle,\ x_2 = -2 \notin \langle -1,\ 2 \rangle$$

Hodnoty funkce :

$a = x_0 = -1$	$x_1 = 0$	$b = 2$
$f(-1) = 0$	$f(0) = 1$	$f(2) = 1 - \sqrt[5]{8^4}$
	max	min

Konvexní a konkávní funkce

Věta. Nechť funkce f je spojitá v intervalu I. Pak platí implikace:

derivace		funkce f je v intervalu I :	derivace		funkce f je v intervalu I :
$f'' > 0$	$\Rightarrow$	ryze konvexní	$f'' < 0$	$\Rightarrow$	ryze konkávní
$f'' \geq 0$	$\Rightarrow$	konvexní	$f'' \leq 0$	$\Rightarrow$	konkávní

$f'' = 0 \Rightarrow f$ je v intervalu I lineární

Inflexní bod

Bod $[x_0, f(x_0)]$ je inflexním bodem funkce f, jestliže

- existuje $f'(x_0) \in \mathbb{R}$
- a funkce f je v nějakém levém okolí bodu x_0 ryze konvexní a nějakém pravém okolí bodu x_0 ryze konkávní (resp. naopak).

(Tj. konvexnost se mění na konkávnost (resp. naopak).)