Opakování

Cvičení

19.12.2019

Lineární algebra

Je dána matice A,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Určete determinant matice A.

b) Určete vlastní čísla matice A.

c) Pro největší v absolutní hodnotě vlastní číslo určete množinu vlastních vektorů.

d) Určete vlastní čísla matice $B = A^3$,
zdůvodněte existenci matice $C = A^{-1}$ a určete její vlastní čísla.

e) Na základě Frobeniovy věty rozhodněte o existenci řešení soustavy rovnic $A\vec{x} = \vec{0}$ a určete všechna řešení této soustavy rovnic.

f) Tvoří vektory sloupce matice A bázi vektorového prostoru $V(\mathbb{R}^5)$ (Zdůvodněte)

Řešení

a) Determinant matice A počítáme rozvojem
$\det A = (-1) \cdot 12 \cdot 0.5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$

b) Vlastní čísla (λ) matice A určíme z charakteristické rovnice
$\det(A - \lambda E) = 0$
$(-1-\lambda)(12-\lambda)(0.5-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$
$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 12, \lambda_3 = 0.5, \lambda_{4,5} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

c) Množina vlastních vektorů pro $\lambda = 12$: $\vec{v}_{\lambda=12} = (0, t, 0, 0, 0)^T$

d) Vlastní čísla matice $B = A^3$ jsou odpovídající λ^3,
$C = A^{-1}$ existuje, protože A je regulární, $\det A \neq 0$ resp. žádné vlastní číslo není 0, vlastní čísla C jsou $\frac{1}{\lambda}$.

e) Soustava rovnic $A\vec{x} = \vec{0}$ má **jediné** řešení $\vec{x} = (0, 0, 0, 0, 0)^T$

f) Vektory sloupce matice A **tvoří** bázi vektorového prostoru $V(\mathbb{R}^5)$:
jsou LN (protože A je regulární), je jich 5.

Diferenciální počet

Uveďte příklad funkce, pro kterou

1. $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$,

   ale $f(x)$ není spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

   např. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$

2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$,

   např. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$

3. $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$,

   např. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$

4. $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$,

   např. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$

Diferenciální počet

Uveďte příklad funkce, pro kterou platí

1. $f'(x_0) = 0$, ale funkce nemá extrém v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$

   např. $f(x) = x^3,\ x_0 = 0$

2. $f''(x_0) = 0$, ale bod $x_0 \in \mathbb{R}$ není inflexním bodem funkce $f(x)$

   např. $f(x) = x^4,\ x_0 = 0$

3. $f'(x_0)$ není definovaná, ale funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ lokální extrém.

   např. $f(x) = |x|,\ x_0 = 0$

Uveďte funkci $f(x)$ a $x_0 \in \mathbb{R}$.

Primitivní funkce

Jsou dány primitivní funkce $F_1,\ F_2,\ F_3$.
Určete funkce $f_1,\ f_2,\ f_3$, ke kterým jsou zadané funkce $F_1,\ F_2,\ F_3$ primitivní.

1. $F_1(x) = x^3 \operatorname{arctg} x - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{1}{6}\ln(1+x^2)$

   $f_1(x) = F_1'(x) = 3x^2 \operatorname{arctg} x + \dfrac{x^3}{1+x^2} - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x}{1+x^2}$

2. $F_2(x) = \arcsin \mathrm{e}^x - \sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}$

   $f_2(x) = F_2'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} + \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

3. $F_3(x) = x^2 - \dfrac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}$

   $f_3(x) = F_3'(x) = 2x + x \cdot \sqrt{4-x^2}$

Integrální počet

Lze při výpočtu následujícího integrálu použít naznačený postup?

1. $$\int (2^{x+2} + \frac{1}{3x})\ dx = 4\int 2^x dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x} dx$$

   ANO

2. $$\int 3e^x \sin 2x\ dx = 3\int e^x\ dx \int \sin 2x\ dx$$

   NE!!!

Integrace per-partes $\int uv' = uv - \int vu'$

1. Doplňte funkci $v'(x)$, je-li $u(x) = x$ a výsledný integrál je

$$\int f(x)\ dx = \underbrace{-\frac{x}{4}\cos 2x}_{uv} + \frac{1}{8}\sin 2x + C$$

$$v = \left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right)', f(x) = \left(-\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x\right)' = \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\frac{\sin 2x}{2}}_{v'}$$

2. Doplňte funkci $u(x)$, je-li $v'(x) = 1$ a výsledný integrál je

$$\int f(x)\ dx = \underbrace{x\ln^2 x}_{uv} - 2x\ln x + 2x + C$$

$$v = x,\ \ u = \ln^2 x, f(x) = \ln^2 x$$

3. Jak volit funkce $u(x)$ a $v'(x)$ při výpočtu integrálu

a) $\int x \operatorname{arctg} x\ dx$ **b)** $\int \frac{x^3}{e^x}\ dx$?

a) $u = \operatorname{arctg} x, v' = x$ b) $u = x^3, v' = e^{-x}$

Substituční metoda

Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu

1. $$\int \sin^3 x \cos 2x \; dx$$

   $$t = \cos x, \; dt = -\sin x \; dx, \; -\int (1-t^2)(t^2-(1-t^2)) \; dt$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$$

   $$t^4 = x, \; 4t^3 dt = dx, \; \int \frac{4t^3}{t^2+t} \; dt = \int \left(4t - 4 + \frac{4}{t+1}\right) \; dt$$

3. $$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$$

   $$t = e^x, \; dt = e^x \; dx, \; \int \frac{t^2}{t^2+1} \; dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) \; dt$$

Rozklad na parciální zlomky

1. Rozložte na základní součin polynom

$$(x^3+1)(x^2-1)(x^2-x^5)$$

$$(x+1)(x^2-x+1)(x+1)(x-1)x^2(1-x)(1+x+x^2) =$$
$$= -x^2(x-1)^2(x+1)^2(1+x-x^2)(1+x+x^2)$$

2. Určete kořeny polynomu
   1. $x^3-3x^2-9x+27$ $\qquad (x-3)^2\ (x+3), \qquad \{-3,3\}$
   2. $x^3-3x^2+9x-27$ $\qquad (x-3)(x^2+9), \qquad \{3\}$
   3. $x^3-9x^2+27x-27$ $\qquad (x-3)^3 \qquad \{3\}$
3. Určete kořeny polynomu x^3+x^2-4x-4: $\qquad \{-2,-1,2\}$
4. Kolik konstant je třeba určit při rozkladu funkce

$$R(x) = \frac{x^2+1}{x^4+2x^3+2x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

na parciální zlomky? [4]

Integrace :)

1. Určete integrál $\int_{-1}^{1} \sin 3x \cos 5x \, dx.$ 0, lichá funkce

2. Určete integrál $\int_{0}^{2\pi} \sin x \sqrt{1+\cos^3 x} \, dx.$ 0,$t = \cos x$, meze: 1,1

3. Určete integrál
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx) \, dx = \begin{cases} \mathrm{I}_a & \text{pro } m = n \\ \mathrm{I}_b & \text{pro } m \neq n \end{cases}, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

(užijte vztah $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$)

$$\mathrm{I}_a = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos 0 + \cos(2mx)) \, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2mx)}{2m}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$
$$\mathrm{I}_b = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((m-n)x)}{(m-n)} + \frac{\sin((m+n)x)}{(m+n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Nevlastní integrál

Rozhodněte o konvergenci/divergenci integrálů:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ $\qquad \displaystyle\lim_{c\to 0^+} 2\sqrt{c} = 0$, konverguje
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$ $\qquad \displaystyle\lim_{c\to 0^+} -\frac{2}{\sqrt{c}} = -\infty$, diverguje
3. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ $\qquad \displaystyle\lim_{c\to \infty} 2\sqrt{c} = \infty$, diverguje
4. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$ $\qquad \displaystyle\lim_{c\to \infty} -\frac{2}{\sqrt{c}} = 0$, konverguje