Vektory: operace, lineární závislost a nezávislost

Sbírka: příklady 2,5,8,12,23-27,38,39,44,51,52

2. Vypočtěte

$$\vec{x} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5. Najděte $\vec{x}$:

$$2\left(\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8. Vypočítejte skalární součin vektorů: $\vec{u} = (-3, 2, 3),\ \vec{v} = (1, 6, -3)$

12. Určete úhel, který svírají vektory: $\vec{u} = (-1, 3),\ \vec{v} = (2, 2)$

Rozhodněte, zda vektory jsou lineárně závislé nebo nezávislé:

23. $$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

24. $$\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

25. $$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

26. $$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ -3 \end{pmatrix}$$

27. $$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

30. $$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

31. $$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$$

---

33. $$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}\quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

---

34. $$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

35. $$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rozhodněte, pro které hodnoty parametrů jsou vektory lineárně závislé:

38. $$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3+\alpha \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\alpha \\ 4 \end{pmatrix}$$

41. $$\vec{u} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$$

42.
$\vec{u} = (0, 1, a),$
$\vec{v} = (2, a, a)$
$\vec{w} = (-1, 0, 1)$

Vyjádřete $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jako lineární kombinaci $\vec{u}, \vec{v}$:

44. $\vec{a} = (-5, 2),\ \vec{b} = (3, 3),\ \vec{u} = (1, 0),\ \vec{v} = (0, 1)$

Tvoří bázi?

51. $V = V(\mathbb{R}_3),\ \vec{a} = (0, 7, 3),\ \vec{b} = (5, 3, 2)$

52. $V = V(\mathbb{R}_3),\ \vec{a} = (1, 2, 5),\ \vec{b} = (-3, 2, 0),\ \vec{c} = (5, 6, 1)$

Matice, determinanty Sbírka: 70, 72, 73, 75-77, 80, 82, 84, 85, 88, 89, 91, 96, 97, 99, 100, 102-105, 107, 109, 111, 113, 114, 115.

70.	72.	73.
$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

75.	76.	77.	80.
$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$	$Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$	$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$	$W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$

82. Určete $A \cdot B - B \cdot A$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

84. Vypočítejte $A \cdot A^T$ a $A^T \cdot A$: $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

85. Najděte $x, y \in \mathbb{R}$, aby platila rovnice: $\begin{pmatrix} x+y & -3 \\ -2 & x-2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right]^T$

Určete **hodnost matice**:

88.	89.	91.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & -6 & -9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & -19 & 5 & 0 \\ 3 & 15 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Určete **inverzní matici**, pokud existuje:

96.	97.	99.	100.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Najděte matici X, pro kterou platí:

102.	103.	105.
$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

104. Určete matici X, pro kterou platí: $A \cdot X = (A-B)^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Vypočítejte **determinanty**:

107.	109.	111.	113.	114.
$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & 3-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} & 1-\sqrt{3} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$