Taylorův polynom

Seminář 8

25. listopadu 2019

Taylorův polynom

Taylorova věta

Nechť je funkce, která má derivace až do řádu n v uzavřeném intervalu I, jehož krajní body jsou čísla x a x_0.

Pak platí

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{T_n(x)} + R_{n+1}(x),$$

kde $R_{n+1}(x)$ je Taylorův zbytek, pro který platí

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \text{ kde } \ \xi \in I, \xi \neq x, x_0$$

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x - x_0)^k, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Příklady

Koeficienty počítáme **přímým výpočtem**.

- $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \ x \in \mathbb{R}$
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ x \in \mathbb{R}$
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \ x \in \mathbb{R}$
- $(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k, \ x \in (-1,1), \ p \in \mathbb{R}$ (binomická řada)

Použití známých rozvojů

V okolí $x_0 = 0$

1. $\mathrm{e}^{2x} = 1 + (2x) + \dfrac{(2x)^2}{2} + \dfrac{(2x)^3}{3!} + \dots$
2. $\cos 2x = 1 - \dfrac{(2x)^2}{2} + \dfrac{(2x)^4}{4!} - \dfrac{(2x)^6}{6!} + \dots$
3. $\mathrm{e}^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \dfrac{(-x^2)^2}{2} + \dfrac{(-x^2)^3}{3!} + \dots$
4. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (přímým výpočtem)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad f(x_0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \qquad f'(x_0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}} \qquad f''(x) = 1$$

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

Použití vzorce pro součet geometrické řady

$$\frac{a}{1-q} \underbrace{=}_{|q|<1} a \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

1. $$\frac{1}{4-2x} = \frac{1}{4(1-\frac{x}{2})} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\dots\right)$$
   pro $|\frac{x}{2}| < 1$

2. $$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{3(1+\frac{2x}{3})} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2x}{3}\right)^k =$$
   $$\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{27}x^3+\dots\right)$$
   pro $|\frac{2x}{3}| < 1$

Příklad: Taylorův polynom 3. stupně pro funkci $y = \operatorname{tg} x$

v okolí $x_0 = 0$

- $f(x) = \text{tg}(x)$ $\qquad \text{tg}(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} \qquad \Rightarrow \qquad \cos(x)\operatorname{tg}(x) = \sin x$

Koeficienty řady určíme porovnáním koeficientů levé a pravé strany

$\text{tg}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$
\begin{aligned}
\cos(x) \cdot \operatorname{tg}(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots\right) \\
&= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots \\
&\qquad\qquad - \frac{c_0}{2} x^2 - \frac{c_1}{2} x^3 - \dots \\
&\quad \dots \\
\sin(x) &= \qquad x \qquad - \frac{x^3}{3!} + \dots
\end{aligned}
$$

Soustava rovnic:

$$
\begin{aligned}
x^0 : &\quad c_0 &= 0 \\
x : &\quad c_1 &= 1 \\
x^2 : &\quad c_2 - \tfrac{c_0}{2} &= 0 \\
x^3 : &\quad c_3 - \tfrac{c_1}{2} &= -\tfrac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Výpočet přibližné hodnoty a odhad chyby $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1$

$$
\begin{array}{ccccc}
f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} & f''(x) = -\frac{1}{x^2} & f'''(x) = \frac{2}{x^3} & f^{(\mathrm{IV})}(x) = -\frac{6}{x^4} \\
f(1) = 0 & f'(1) = 1 & f''(1) = -1 & f'''(1) = 2 & f^{(\mathrm{IV})}(1) = -6
\end{array}
$$

Výpočet přibližné hodnoty $\ln 0.9$

- $T_1(x) = x - 1$ $\qquad R_2(x) = -\dfrac{1}{\xi^2}\dfrac{1}{2}(x-1)^2$

  $f(0.9) \doteq T_1(0.9) = -0.1 \qquad R_2(0.9) = -\dfrac{1}{\xi^2}\dfrac{1}{2}(-0.1)^2,\ \xi \in (0.9,\ 1)$

  $|R_2(0.9)| \le \dfrac{1}{0.81} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 0.01 \qquad |\ln(0.9) - T_1(0.9)| \le \dfrac{1}{162}$

- $T_2(x) = (x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2$ $\qquad R_3(x) = \dfrac{2}{\xi^3}\dfrac{1}{6}(x-1)^3$

  $f(0.9) \doteq T_2(0.9) = -0.105 \qquad R_3(0.9) = \dfrac{2}{\xi^3}\dfrac{1}{6}(x-1)^3,\ \xi \in (0.9,\ 1)$

  $|R_3(0.9)| \le \dfrac{1}{0.729} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 0.001 \qquad |\ln(0.9) - T_2(0.9)| \le \dfrac{1}{2187}$

- $T_3(x) = (x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}(x-1)^3$ $\qquad R_4(x) = -\dfrac{6}{\xi^4}\dfrac{1}{24}(x-1)^4$