Taylorův polynom

Seminář 8

28. listopadu 2018

Taylorův polynom

Taylorova věta z diferenciálního počtu:
Nechť je funkce, která má derivace až do řádu n v uzavřeném intervalu I, jehož krajní body jsou čísla x a x_0.
Pak platí

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

kde $R_{n+1}(x)$ je Taylorův zbytek, pro který platí

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \text{ kde } \ \xi \in I, \xi \neq x, x_0$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Příklady

Koeficienty počítáme **přímým výpočtem**.

- $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},\ x \in \mathbb{R}$
- $\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ x \in \mathbb{R}$
- $\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},\ x \in \mathbb{R}$
- $(1+x)^p = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k,\ x \in (-1,1),\ p \in \mathbb{R}$ (binomická řada)

Použití známých rozvojů

1. e^{2x}
2. $\cos 2x$
3. e^{-x^2}
4. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (přímým výpočtem)

Použití vzorce pro součet geometrické řady

$$\frac{a}{1-q} \underbrace{=}_{|q|<1} a \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

1. $\dfrac{1}{4-2x}$

2. $\dfrac{1}{3+2x}$

Operace a konvergentními řadami

1. $$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \cdots = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \ldots$$

2. $$\frac{\operatorname{arctg} x}{1-x^2} = \cdots = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{13}{15}x^5 + \ldots$$

3. $x \cos x$

4. $\mathrm{e}^x + \dfrac{\cos x}{1+x}$

Výpočet přibližné hodnoty a odhad chyby

(sbírka Kračmar, Mráz, Neustupa)

Př. 661 $f(x) = \sqrt{x} + \frac{x^2}{2}, \quad x_0 = 4, \quad n = 2, \quad f(4.4) = ?$

Př. 662 $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x^3}{3}, \quad x_0 = 0, \quad n = 2, \quad f(0.5) = ?$

V.,př. 38, $f(x) = \sqrt{2x+1} - \frac{x^2}{2}, \quad x_0 = 0, \quad n = 2, \quad f(0.75) = ?$