Co nám prozradí derivace?

Seminář sedmý

21. listopadu 2018

Derivace základních funkcí

$\boxed{1}$ $(c)' = 0,\ c \in \mathbb{R}$ (konst.), $x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{2}$ $(x^r)' = r \cdot x^{r-1},\ r \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^+$,

$\boxed{3}$ $(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{4}$ $(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{5}$ $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x,\ x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{6}$ $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$\boxed{7}$ $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$\boxed{8}$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+$,

$\boxed{9}$ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$,

$\boxed{10}$ $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$,

$\boxed{11}$ $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{12}$ $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{13}$ $(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{14}$ $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}^+$.

Tečna a normála

Tečna ke grafu funkce f v bodě dotyku $T = [x_0, f(x_0)]$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Normála:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Příklady

- $y = \operatorname{arctg} x, \quad [1, ?]$
- $y = x^3 + 3x^2 - 5$, tečnu kolmou k $y = 2x - 6y + 1$

Monotonie, extrémy

Věta. Nechť funkce f je spojitá v intervalu I. Pak platí implikace:
$f' > 0 \Rightarrow f$ je v intervalu I rostoucí
$f' \geq 0 \Rightarrow f$ je v intervalu I neklesající
$f' < 0 \Rightarrow f$ je v intervalu I klesající
$f' \leq 0 \Rightarrow f$ je v intervalu I nerostoucí
$f' = 0 \Rightarrow f$ je v intervalu I konstantní

Lokální extrémy

Funkce má v bodě x_0 **lokální minimum** (**lokální maximum**), existuje-li okolí $P(x_0)$ bodu x_0, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{resp.} \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Věta Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f'(x_0)$, je $f'(x_0) = 0$.

To znamená, že funkce může nabývat svých lokálních extrémů na intervalu I v těch vnitřních bodech intervalu I, ve kterých:

- nemá derivaci
- derivace je rovna nule

Globální (absolutní) extrémy

Definice: Nechť $M \subset \mathcal{D}(f)$ a $x_0 \in M$.
Funkce f nabývá **na množině** M **globálního maxima** (resp. **globálního minima**) v bodě x_0, jestliže pro všechna $x \in M$ platí

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{resp.} \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Spojitá funkce na **uzavřeném intervalu** $\langle a, b \rangle$ nabývá absolutních extrémů. Extrémy mohou být: v bodě lokálního extrému na (a, b) nebo v krajních bodech a, b.

Příklad:
$y = 1 - \sqrt[5]{(x^2 + 2x)^4} = 1 - (x^2 + 2x)^{\frac{4}{5}}, \quad$ na intervalu $\langle -1,\ 2 \rangle$.

Konvexní a konkávní funkce

Věta. Nechť funkce f je spojitá v intervalu I. Pak platí implikace:
$f'' > 0 \Rightarrow f$ je v intervalu I ryze konvexní
$f'' \geq 0 \Rightarrow f$ je v intervalu I konvexní
$f'' < 0 \Rightarrow f$ je v intervalu I ryze konkávní
$f'' \leq 0 \Rightarrow f$ je v intervalu I konkávní
$f'' = 0 \Rightarrow f$ je v intervalu I lineární

Inflexní bod
Bod $[x_0, f(x_0)]$ je inflexním bodem funkce f,
jestliže existuje $f'(x_0) \in \mathbb{R}$
a funkce f je v nějakém levém okolí bodu x_0 ryze konvexní a nějakém pravém okolí bodu x_0 ryze konkávní (resp. naopak).
(Tj. konvexnost se mění na konkávnost (resp. naopak).)

Asymptoty

Rovnice asymptot.

- svislá: $x = x_0$, pokud aspoň jedna jednostranná limita pro $x \to x_0$ je $\pm\infty$
- šikmá: $y = kx + q$, kde $k = lim\frac{f(x)}{x}$, $q = \lim f(x) - kx$

Průběh funkce

1. Pro **funkci** určíme:
   1. definiční obor $\mathcal{D}(f)$,
   2. zda je (není) sudá, lichá, periodická
   3. průsečíky s osami souřadnic (pokud existují)
   4. jednostranné limity v krajních bodech $\mathcal{D}(f)$
2. Najdeme **rovnice asymptot**.
   - svislá: $x = x_0$, pokud aspoň jedna jednostranná limita pro $x \to x_0$ je $\pm\infty$
   - šikmá: $y = kx + q$, kde $k = lim\frac{f(x)}{x}$, $q = \lim f(x) - kx$
3. Vypočteme a vyšetříme **derivaci** $f'(x)$:

$$f'(x)\begin{cases} > 0 & \to \quad f(x) \text{ je rostoucí} \\ < 0 & \to \quad f(x) \text{ je klesající} \\ = 0 & \to \quad \text{stacionární body} \end{cases}$$

4. Vypočteme a vyšetříme **druhou derivaci** $f''(x)$:

$$f''(x)\begin{cases} > 0 & \to \quad f(x) \text{ je ryze konvexní} \\ < 0 & \to \quad f(x) \text{ je ryze konkávní} \\ = 0 & \to \quad \text{možné inflexní body} \end{cases}$$

5. **Graf**.

Půběh funkce : příklady

- $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3$
- $y = \frac{1}{2}x + \operatorname{arctg} x$
- $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

Půběh funkce $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

1. Pro **funkci** určíme:

1. definiční obor $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$,
2. zda je sudá: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = f(x) \Rightarrow$**je sudá**.
   Proto vyšetříme průběh pouze na množině $\langle 0, 1) \cup (1, +\infty)$
3. průsečíky s osami souřadnic (pokud existují):
   $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow Y = [0, -1]$; $y \neq 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(f)$
4. jednostranné limity v krajních bodech $\mathcal{D}(f)$:
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$
   $$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$
   $$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Průběh $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$: 1. a 2. derivace

2. Určíme derivaci:

$$y' = \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{-4x}{(x^2-1)^2} \begin{cases} > 0 & x \in (-\infty, -1) & \rightarrow & f(x) \text{ je rostoucí} \\ & x \in (-1, 0) & \rightarrow & f(x) \text{ je rostoucí} \\ < 0 & x \in (0, 1) & \rightarrow & f(x) \text{ je klesající} \\ & x \in (1, \infty) & \rightarrow & f(x) \text{ je klesající} \\ = 0 & x = 0 & \rightarrow & M = [0, 1] \text{ lokální maximum} \end{cases}$$

3. Určíme druhou derivaci:

$$y'' = \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

$$\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3} \begin{cases} > 0 & x^2-1 > 0 & x \in (-\infty, -1) & \rightarrow & f(x) \text{ je konvexní} \\ & & x \in (1, \infty) & \rightarrow & f(x) \text{ je konvexní} \\ < 0 & x^2-1 < 0 & x \in (-1, 1) & \rightarrow & f(x) \text{ je konkávní} \\ \neq 0 & & & \rightarrow & \text{nemá inflexní body} \end{cases}$$

Průběh $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$: Asymptoty

- svislá: $x = x_0$, pokud aspoň jedna jednostranná limita pro $x \to x_0$ je $\pm\infty$
  $$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to +1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$$
  Tedy přímky $x = -1$ a $x = 1$ jsou svislými asymptotami.
- šikmá: $y = kx + q$, kde $k = lim\frac{f(x)}{x}$, $q = \lim f(x) - kx$
  $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{(x^2-1)x} = 0$$
  $$\lim_{x\to\infty} f(x) - 0 \cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$
  Přímka $y = 1$ je šikmá asymptota.