Co nám prozradí derivace?

Seminář šestý a sedmý

11. a 18. listopadu 2019

Obsah

1. Derivace základních funkcí
2. l'Hospitalovo pravidlo
3. Tečna a normála
4. Monotonie, lokální extrémy
5. Globální extrémy
6. Konvexní, konkávní funkce
7. Asymptoty
8. Průběh funkce

Derivace základních funkcí

$\boxed{1}$	$(c)' = 0,\ c \in \mathbb{R}$ (konst.), $x \in \mathbb{R}$,
$\boxed{2}$	$(x^r)' = r \cdot x^{r-1},\ r \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^+$,
$\boxed{3}$	$(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$,
$\boxed{4}$	$(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}$,
$\boxed{5}$	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x,\ x \in \mathbb{R}$,
$\boxed{6}$	$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,
$\boxed{7}$	$(\mathrm{cotg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,
$\boxed{8}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\quad x \in \mathbb{R}^+$,
$\boxed{9}$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x \in (-1, 1)$,
$\boxed{10}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x \in (-1, 1)$,
$\boxed{11}$	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{x^2+1},\quad x \in \mathbb{R}$,
$\boxed{12}$	$(\mathrm{arccotg}\, x)' = -\dfrac{1}{x^2+1},\quad x \in \mathbb{R}$,
$\boxed{13}$	$(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$,
$\boxed{14}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}^+$.

součet, rozdíl

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

derivace součinu

$$(fg)' = f'g + fg'$$

derivace podílu

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

derivace **složené funkce**

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Derivace $f(x)^{g(x)}$

Příklad

$$f(x) = x^{\sin x}, \quad x \in (0, \infty)$$

$$\ln f(x) = \sin x \ln x$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = (\sin x)' \ln x + \sin x \, (\ln x)'$$

$$f'(x) = \underbrace{x^{\sin x}}_{f(x)} \cdot \left(\cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

Příklad

$$f(x) = \sin x^{\cos x}, \quad x \in (0, \pi)$$

$$\ln f(x) = \cos x \ln \sin x$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = (\cos x)' \ln \sin x + \cos x \, (\ln \sin x)'$$

$$\frac{1}{f(x)} f' = \underbrace{\sin x^{\cos x}}_{f(x)} \cdot \left(-\sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \right)$$

ℓ'Hospitalovo pravidlo

$$x_0 \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{nebo} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokud pravá limita existuje.

$\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{arctg}\ x}{x} = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$

$\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

- $0 \cdot \infty$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$ upravíme: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$

  $$\lim_{x\to 0} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \infty \qquad \lim_{x\to 0}(1-x^2)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2} = \frac{1-x^2}{\mathrm{cotg}\frac{\pi x}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

- $\infty - \infty$ upravíme např. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)$

  nebo převedeme na společný jmenovatel.

  $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} =$$

  $$\lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

Jiné nedefinované výrazy

- $1^\infty, \quad 0^\infty, \quad 0^0$:
$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}, \qquad\qquad f(x) > 0$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x) = \ln L$$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = L$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln L$$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\ln L = 1 \quad \Rightarrow \quad L = e \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Tečna a normála

Tečna ke grafu funkce f v bodě dotyku $T = [x_0, f(x_0)]$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Normála:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad \text{pro } f'(x_0) \neq 0$$

Příklady

- $y = \operatorname{arctg} x, \quad [1, ?]$
  1. $y_0 = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$
  2. $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}, \qquad f'(x_0) = \dfrac{1}{1+x_0} = \dfrac{1}{2}$
  3. $t : y - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}(x-1)\ , \qquad n : y - \dfrac{\pi}{4} = -2(x-1)$
- $y = x^3 + 3x^2 - 5$, tečnu kolmou k $2x - 6y + 1 = 0$
  1. $f'(x) = 3x^2 + 6x$, tečna kolmá k $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$.
  2. Směrnice normály $-\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{3}$, směrnice tečny $f'(x_0) = -3$.

     $3x_0^2 + 6x_0 = -3 \Rightarrow x_0 = -1,\ y_0 = f(x_0) = -3$
  3. $t : y + 3 = -3(x+1)\ , \qquad n : y + 3 = \dfrac{1}{3}(x+1)$

Monotonie, extrémy

Věta. Nechť funkce f je spojitá v intervalu I. Pak platí implikace:

derivace		funkce f je v intervalu I :	derivace		funkce f je v intervalu I :
$f' > 0$	$\Rightarrow$	rostoucí	$f' < 0$	$\Rightarrow$	klesající
$f' \geq 0$	$\Rightarrow$	neklesající	$f' \leq 0$	$\Rightarrow$	nerostoucí

$f' = 0 \Rightarrow f$ je v intervalu I konstantní

Lokální extrémy

Funkce má v bodě x_0 **lokální minimum** (**lokální maximum**), existuje-li okolí $P(x_0)$ bodu x_0, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{resp.} \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Věta

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f'(x_0)$, je $f'(x_0) = 0$.

To znamená, že funkce může nabývat svých lokálních extrémů na intervalu I v těch vnitřních bodech intervalu I, ve kterých:

- nemá derivaci
- derivace je rovna nule

Příklad: monotonie, lokální extrémy

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln x}, \quad \mathcal{D}(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$$

- $f'(x) = \dfrac{2x\ln x - x^2\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}, \quad \mathcal{D}(f') = \mathcal{D}(f)$
- Určíme nulové body derivace:
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 1 \ (x \neq 0)$, tj. $x = e^{\frac{1}{2}}$
- Každý z intervalů $\mathcal{D}(f')$ rozdělíme nulovými body na disjunktní intervaly: $(0,1)$, $(1,\sqrt{e})$, $(\sqrt{e},\infty)$
- V každém z těchto intervalů zvolíme jeden bod a určíme znaménko derivace ve zvolených bodech.
  ($x > 0$, $\ln^2 x > 0$, proto stačí určit znaménko $2\ln x - 1$)

	$(0,1)$	$(1,\sqrt{e})$	$\sqrt{e}$	$(\sqrt{e},\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

- Závěr: Funkce je rostoucí v intervalu $\langle\sqrt{e},\infty)$, klesající v intervalech $(0,1)$ a $(1,\sqrt{e}\rangle$. Má lokální minimum e v bodě $x_0 = \sqrt{e}$.

Příklad: monotonie, lokální extrémy

$$f(x) = 2x + 9\sqrt[3]{(1-x)^2}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$$

- $f'(x) = 2 - \dfrac{6}{\sqrt[3]{1-x}}, \quad \mathcal{D}(f') = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
- Derivace není definovaná pro $x = 1$.
- Určíme nulové body derivace:
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x} = 3$, tj. $x = -26$.
-

	$(-\infty, -26)$	-26	$(-26, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	není	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

- Závěr: Funkce je rostoucí v intervalech $(-\infty, -26\rangle$ a $\langle 1, \infty)$, klesající v intervalu $\langle -26, 1\rangle$. Má lokální minimum 2 v bodě $x_0 = 1$, lokální maximum 29 v bodě $x_1 = -26$.

Globální (absolutní) extrémy

Definice: Nechť $M \subset \mathcal{D}(f)$ a $x_0 \in M$.
Funkce f nabývá **na množině** M **globálního maxima** (resp. **globálního minima**) v bodě x_0, jestliže pro všechna $x \in M$ platí

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{resp.} \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Spojitá funkce na **uzavřeném a omezeném intervalu** $\langle a, b\rangle$ **nabývá** absolutních extrémů. Extrémy mohou být:
v bodě lokálního extrému na (a, b) nebo v krajních bodech a, b.

Příklad:
$y = 1 - \sqrt[5]{(x^2+2x)^4} = 1 - (x^2+2x)^{\frac{4}{5}}$, na intervalu $\langle -1,\ 2\rangle$.
Stacionární body:

$$y' = 0: \quad \frac{4}{5}(x^2+2x)^{-\frac{1}{5}} \cdot (2x+2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$$

Derivace neexistuje (jmenovatel $= 0$), ale funkce je definovaná:

$$x_1 = 0 \in \langle -1,\ 2\rangle,\ x_2 = -2 \notin \langle -1,\ 2\rangle$$

Hodnoty funkce :

$a = x_0 = -1$	$x_1 = 0$	$b = 2$
$f(-1) = 0$	$f(0) = 1$	$f(2) = 1 - \sqrt[5]{8^4}$
	max	min

Globální extrémy : příklady

- $f(x) = \sin x, \quad \mathcal{I} = \langle 0, 4\pi \rangle$
  Nabývá globálního maxima $f(x) = 1$ v bodech $x_1 = \frac{1}{2}\pi, x_2 = \frac{5}{2}\pi$,
  globálního minima $f(x) = -1$ v bodech $x_1 = \frac{3}{2}\pi, x_2 = \frac{7}{2}\pi$.
- $f(x) = x^3, \quad \mathcal{I} = \langle -1, 2)$
  Nabývá globálního minima $f(x) = -1$ v bodě $x = -1$,
  globálního maxima nenabývá.
- $f(x) = x^3, \quad \mathcal{I} = (-1, 2\rangle$
  Nabývá globálního maxima $f(x) = 8$ v bodě $x = 2$,
  globálního minima nenabývá.
- $f(x) = x^3, \quad \mathcal{I} = \langle -1, 2)$
  Nabývá globálního minima $f(x) = -1$ v bodě $x = -1$,
  globálního maxima nenabývá.
- $f(x) = x^3, \quad \mathcal{I} = \mathbb{R}$
  Nenabývá globálního maxima ani globálního minima.
- $f(x) = e^{-x^2}, \quad \mathcal{I} = \mathbb{R}$
  $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$
  $f'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad f'(x) = 0$ pro $x = 0$
  Globální maximum $f(x) = 1$ v bodě $x = 0$, globální minimum nemá.

Konvexní a konkávní funkce

Funkce $f(x)$ je na intervalu $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}(f)$

ryze konvexní | **ryze konkávní**

jestliže $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{D}(f)$, takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí:

$$f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) \qquad f(x_2) > f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$$

(bod$[x_2, f(x_2)]$ leží pod (resp. nad) sečnou $Q_1 = [x_1, f(x_1)]Q_2 = [x_3, f(x_3)]$)

Věta. Nechť funkce f má f'' v intervalu $\mathcal{I} = (a, b)$. Pak platí implikace:

derivace $\forall x \in \mathcal{I}$		funkce f je v intervalu $\mathcal{I}$:	derivace $\forall x \in \mathcal{I}$		funkce f je v intervalu $\mathcal{I}$:
$f'' > 0$	$\Rightarrow$	ryze konvexní	$f'' < 0$	$\Rightarrow$	ryze konkávní
$f'' \geq 0$	$\Rightarrow$	konvexní	$f'' \leq 0$	$\Rightarrow$	konkávní

$f'' = 0 \Rightarrow f$ je v intervalu $\mathcal{I}$ lineární

Inflexní bod. Bod $[x_0, f(x_0)]$ je inflexním bodem funkce f, jestliže

- existuje $f'(x_0) \in \mathbb{R}$
- a funkce f je v nějakém levém okolí bodu x_0 ryze konvexní a nějakém pravém okolí bodu x_0 ryze konkávní (resp. naopak).

(Tj. konvexnost se mění na konkávnost (resp. naopak).)

Příklad: konvexnost, konkávnost

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln x}, \quad \mathcal{D}(f) = (0,1) \cup (1,\infty)$$

- $f'(x) = \dfrac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$, $f''(x) = \dfrac{2\ln^2 x - 3\ln x + 2}{\ln^3 x}$, $\mathcal{D}(f'') = \mathcal{D}(f)$
- Určíme nulové body 2. derivace: nemá.
- V každém z intervalů $\mathcal{D}(f'')$ zvolíme jeden bod a určíme znaménko 2. derivace ve zvolených bodech.
  (čitatel je kladný, proto stačí určit znaménko $\ln x$)

	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$

- Závěr:
  Funkce je konvexní v intervalu $(1,\infty)$, konkávní v intervalu $(0,1)$.
  Nemá inflexní body.

Příklad: konvexnost, konkávnost, inflexní body

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$$

- $f'(x) = -2xe^{-x^2},\ f''(x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2},\ \mathcal{D}(f'') = \mathbb{R}$
- Určíme nulové body 2. derivace:
  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$
- $\mathcal{D}(f'')$ rozdělíme nulovými body na disjunktní intervaly:
  $(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}),$ $(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}),$ $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$
- V každém z těchto intervalů zvolíme jeden bod a určíme znaménko derivace ve zvolených bodech. (stačí určit znaménko $2x^2-1$)
-

	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\smile$	infl.	$\frown$	infl.	$\smile$

- Závěr: Funkce je konvexní v intervalech $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ a $\langle\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$, konkávní v intervalu $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$. Body $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ jsou inflexní.

Příklad: konvexnost, konkávnost, inflexní body

$$f(x) = x^6, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$$

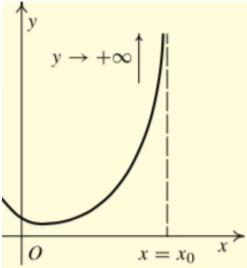
- $f'(x) = 6x^5,\ f''(x) = 30x^4,\ \mathcal{D}(f'') = \mathbb{R}$
- Určíme nulové body 2. derivace: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\mathcal{D}(f'')$ rozdělíme nulovými body na disjunktní intervaly:
  $(-\infty, 0), \quad (0, \infty)$
- V každém z těchto intervalů zvolíme jeden bod a určíme znaménko derivace ve zvolených bodech.
-

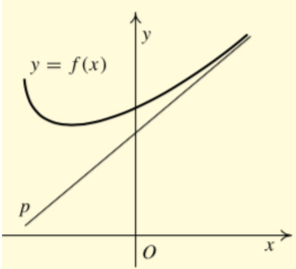
	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\smile$		$\smile$

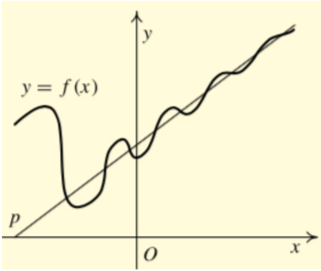
- Závěr:
  Funkce je konvexní na celém definičním oboru. Nemá inflexní body.

Asymptoty. Rovnice asymptot

- **svislá:** $x = x_0$ (přímka rovnoběžná s osou y), pokud aspoň jedna jednostranná limita pro $x \to x_0$ je nevlastní, tj.
  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$
- **šikmá:** $y = kx + q$
  Přímka $y = kx + q$ je asymptotou grafu funkce $f(x)$ v $+\infty$ právě tehdy, když $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}$.
  Přímka $y = kx + q$ je asymptotou grafu funkce $f(x)$ v $-\infty$ právě tehdy, když $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}$.







Příklady: asymptoty

Příklad. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

a) svislá

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = \infty.$ Přímka $x = 0$ je svislou asymptotou grafu $f(x)$.

b) šikmá

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^3} = 0, \quad q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Přímka $y = 0$ je asymptotou grafu $f(x)$ v plus i mínus nekonečnu.

Příklad. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 10x}{x}$, $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

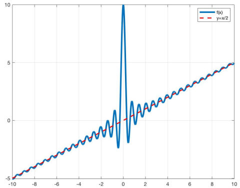
a) svislá $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 10x}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 10x}{x} \right) = 10.$

Graf $f(x)$ nemá svislou asymptotu.

b) šikmá

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin 10x}{x^2} \right) = \frac{1}{2},$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin 10x}{x} = 0$$



Přímka $y = \frac{1}{2}x$ je asymptotou grafu $f(x)$ v plus i mínus nekonečnu.

Průběh funkce

1. Pro **funkci** určíme:
   1. definiční obor $\mathcal{D}(f)$,
   2. zda je (není) sudá, lichá, periodická
   3. průsečíky s osami souřadnic (pokud existují)
   4. jednostranné limity v krajních bodech $\mathcal{D}(f)$
2. Najdeme **rovnice asymptot**.
   - svislá: $x = x_0$, pokud aspoň jedna jednostranná limita pro $x \to x_0$ je $\pm\infty$
   - šikmá: $y = kx + q$, kde $k = \lim \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim f(x) - kx$
3. Vypočteme a vyšetříme **derivaci** $f'(x)$:
$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \to \quad f(x) \text{ je rostoucí} \\ < 0 & \to \quad f(x) \text{ je klesající} \\ = 0 & \to \quad \text{stacionární body} \end{cases}$$
4. Vypočteme a vyšetříme **druhou derivaci** $f''(x)$:
$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \to \quad f(x) \text{ je ryze konvexní} \\ < 0 & \to \quad f(x) \text{ je ryze konkávní} \\ = 0 & \to \quad \text{možné inflexní body} \end{cases}$$
5. **Graf**.

Půběh funkce : příklady

- $y = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3$
- $y = \frac{1}{2}x + \operatorname{arctg} x$
- $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

Půběh funkce $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

1. Pro **funkci** určíme:

1. definiční obor $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$,
2. zda je sudá: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = f(x) \Rightarrow$ **je sudá**.
   Proto vyšetříme průběh pouze na množině $\langle 0, 1) \cup (1, +\infty)$
3. průsečíky s osami souřadnic (pokud existují):
   $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow Y = [0, -1];\ \ y \neq 0\ \forall x \in \mathcal{D}(f)$
4. jednostranné limity v krajních bodech $\mathcal{D}(f)$:
   $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1$$
   $$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$
   $$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Průběh $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$: Asymptoty

2. Určíme rovnice asymptot.

- svislá: $x = x_0$, pokud aspoň jedna jednostranná limita pro $x \to x_0$ je $\pm\infty$
  $$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to +1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$$
  Tedy přímky $x = -1$ a $x = 1$ jsou svislými asymptotami.
- šikmá: $y = kx + q$, kde $k = \lim \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim f(x) - kx$
  $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{(x^2-1)x} = 0$$
  $$\lim_{x\to\infty} f(x) - 0 \cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$
  Přímka $y = 1$ je šikmá asymptota.

Průběh $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$: 1. a 2. derivace

3. Určíme derivaci:

$$y' = \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{-4x}{(x^2-1)^2} \begin{cases} > 0 & x \in (-\infty, -1) & \rightarrow & f(x) \text{ je rostoucí} \\ & x \in (-1, 0) & \rightarrow & f(x) \text{ je rostoucí} \\ < 0 & x \in (0, 1) & \rightarrow & f(x) \text{ je klesající} \\ & x \in (1, \infty) & \rightarrow & f(x) \text{ je klesající} \\ = 0 & x = 0 & \rightarrow & M = [0, 1] \text{ lokální maximum} \end{cases}$$

4. Určíme druhou derivaci:

$$y'' = \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x \cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

$$\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3} \begin{cases} > 0 & x^2-1 > 0 & x \in (-\infty, -1) & \rightarrow & f(x) \text{ je konvexní} \\ & & x \in (1, \infty) & \rightarrow & f(x) \text{ je konvexní} \\ < 0 & x^2-1 < 0 & x \in (-1, 1) & \rightarrow & f(x) \text{ je konkávní} \\ \neq 0 & & & \rightarrow & \text{nemá inflexní body} \end{cases}$$

Průběh $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$: graf

5. Podle výsledků výpočtů sestrojíme graf.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\infty)$
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	l.max.	$\searrow$	$\searrow$
f''	$+$	$-$		$-$	$+$
f	$\smile$	$\frown$		$\frown$	$\smile$