Limity posloupností a funkcí

Seminář pátý

7. listopadu 2018

Posloupnosti a funkce

Posloupnost reálných čísel:
každému **přirozenému** číslu $n \in \mathbb{N}$ přiřadíme **reálné** číslo $a_n \in \mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; n \underbrace{\rightarrow}_{\text{přiřadíme}} a_n \in \mathbb{R}, \quad \{a_n\} \subset \mathbb{R}$$

posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots\}$

Funkce (*reálná funkce jedné reálné proměnné*) na množině D
je předpis,
který **každému** číslu z množiny D
přiřazuje **právě jedno** reálné číslo.

Funkce definovaná na množině přirozených čísel se nazývá
posloupnost.

Limita

Číslo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^*$ **je limitou** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže ke každému reálnému číslu ε existuje index n_0 tak, že nerovnost $|a_n - \mathbf{A}| < \varepsilon$ je splněna pro všechna $n > n_0$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} :\ n > n_0\ \Rightarrow |a_n - \mathbf{A}| < \varepsilon}$$

To znamená, že ke **každému** $\varepsilon > 0$ existuje pouze konečný počet členů posloupnosti, které neleží v pásu $(\mathbf{A} - \varepsilon, \mathbf{A} + \varepsilon)$. Těchto členů je nejvýše n_0.

Vlastní limita funkce ve vlastním bodě

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

Nevlastní limita funkce ve vlastním bodě

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : f(x) > M$$

Vlastní limita funkce ve nevlastním bodě

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

Nevlastní limita funkce ve nevlastním bodě

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow$$

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > K : f(x) > M$$

Vlastnosti limit

1. Věta: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$. Limita v bodě x_0 existuje právě tehdy, když v tomto bodě existují obě jednostranné limity a jsou stejné.

2. Věta: Funkce má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.

3. Věta (Henrich Eduard Heine):
   Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu x_0. Potom $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ právě když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je x_n v tomto prstencovém okolí, platí

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

4. Předpokládejme, že existuje funkce $f(x)$, kde $D(f) = \langle 1, \infty)$ taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $f(n) = a_n$ a $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$.
   Pak platí

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

Některé známé limity

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad p < 0 \\ 1 & \text{pro} \quad p = 0 \\ +\infty & \text{pro} \quad p > 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \text{neex.} & \text{pro} \quad -\infty < a \leq -1 \\ 0 & \text{pro} \quad -1 < a < 1 \\ 1 & \text{pro} \quad a = 1 \\ +\infty & \text{pro} \quad a > 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e (= 2.718281828...)$

Věta o "aritmetice limit"

Věta: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť existují $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Platí:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to x_0} f(x)|$

Spojitost funkce

Funkce je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže platí: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Je-li funkce f spojitá v bodě x_0, potom

- existuje vlastní limita funkce f v bodě x_0
- funkce f je definovaná v bodě x_0 ($f(x_0)$)
- hodnota funkce a její limity se rovnají

Vlastnost spojitých funkcí

1. Věta: Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak i funkce $f \pm g$ a $f \cdot g$ jsou spojité v bodě x_0. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je i funkce f/g spojitá v bodě x_0.
2. Věta: Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a nechť funkce g je spojitá v bodě $f(x_0)$. Potom funkce $g(f(x))$ je spojitá v bodě x_0.
3. Věta: Nechť f je základní elementární funkce a nechť x_0 je vnitřním bodem definičního oboru $D(f)$. Potom funkce f je spojitá v bodě x_0.

Výpočet limit

- Limity funkcí spojitých v bodě: dosazení.
- Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu.
  (počítání s $\pm\infty$)
- Limita funkcí shodujících se v prstencovém okolí bodu
  (úprava – zkrácení – rozšíření zlomku – vytýkání)
- Věta o sevření
- Věta o součinu nulové a omezené funkce
- Věta o limitě složené funkce
- Věta o limitě typu "$1/0$"
  $\left(\dfrac{1}{0^+} = +\infty\right)$ $\left(\dfrac{1}{0^-} = -\infty\right)$