Vlastní čísla a vlastní vektory

Seminář čtvrtý

21. října 2019

Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice. Komplexní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo čtvercové matice A a $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ, pokud

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad \vec{x} \neq \vec{o}.$$

Poznamenejme, že $\vec{x} \neq \vec{o}$ je nutná podmínka, protože pro $\vec{x} = \vec{o}$ by rovnost byla triviálně splněna pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Na druhou stranu, $\lambda = 0$ klidně může nastat.

Výpočet vlastních čísel a určení vlastních vektorů

$$A\vec{x} = \lambda \cdot E \cdot \vec{x} \Rightarrow (A - \lambda E)\,\vec{x} = \vec{o}$$

$\vec{x} \neq \vec{o} \Rightarrow$ homogenní soustava rovnic s maticí soustavy $(A - \lambda E)$ musí mít nekonečně mnoho řešení, tedy musí platit:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Rozepsáním determinantu dostáváme charakteristický polynom matice A vzhledem k proměnné λ. Kořeny tohoto polynomu jsou vlastní čísla λ_k.
Pro každé vlastní číslo řešíme soustavu rovnic

$$(A - \lambda_k E)\vec{x}_k = \vec{o},$$

jejími nenulovými řešeními jsou vlastní vektory $\vec{x}_k$.

Vlastní vektor při daném vlastním čísle není určen jednoznačně,

každý jeho nenulový násobek je také vlastním vektorem.

Příklady: Vlastní čísla a vlastní vektory

Určíme vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. charakteristický polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

2. vlastní čísla $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ jsou kořeny $p(\lambda)$, tj. řešení $p(\lambda) = 0$: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5$
3. vlastní vektory, odpovídající λ_1, určíme řešením $(A - \lambda_1 E)\vec{x}_1 = \vec{o}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-(-1) & 2 & 0 \\ 4 & 1-(-1) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t,\ t \neq 0,\ t \in \mathbb{C}$$

4. vlastní vektory, odpovídající λ_2, určíme řešením $(B - \lambda_2 E)\vec{x}_2 = \vec{o}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-5 & 2 & 0 \\ 4 & 1-5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} r,\ r \neq 0,\ r \in \mathbb{C}$$

Příklad 2

Určíme vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. charakteristický polynom $p(\lambda) = \det(B - \lambda E)$:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -8 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 + 16 = \lambda^2 - 6\lambda + 25$$

2. vlastní čísla $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ jsou kořeny $p(\lambda)$, tj. řešení $p(\lambda) = 0$:
$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm i\sqrt{64}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 3 + 4i,\ \lambda_2 = 3 - 4i$
3. vlastní vektory, odpovídající λ_1, určíme řešením $(B - \lambda_1 E)\vec{x}_1 = \vec{o}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-(3+4i) & -8 & 0 \\ 2 & 3-(3+4i) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -4i & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ t \end{pmatrix} t,\ t \neq 0,\ t \in \mathbb{C}$$

4. vlastní vektory, odpovídající λ_2, určíme řešením $(B - \lambda_2 E)\vec{x}_2 = \vec{o}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-(3-4i) & -8 & 0 \\ 2 & 3-(3-4i) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4i & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} r,\ r \neq 0, r \in \mathbb{C}$$

Příklady

Najdeme vlastní čísla a vlastní vektory matic

Příklad 3

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Příklad 4

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti vlastních čísel

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$.
Potom platí:

- A je regulární právě tehdy, když 0 není její vlastní číslo,
- je-li A regulární, pak A^{-1} má vlastní čísla $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$, vlastní vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$,
- A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$, vlastní vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$,
- αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$,
- $A + \alpha E_n$ má vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \ldots, \lambda_n + \alpha$, vlastní vektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$,
- A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ale **vlastní vektory** obecně **jiné**.

Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pak i komplexně sdružené $\bar{\lambda}$ je vlastním číslem A.

Elementární řádkové úpravy matice mění její vlastní čísla.

Příklad 5

Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Rozhodněte, zda její vlastní čísla resp. vlastní vektory by mohly být:

1. 1, -1, $1+i$
2. 2, $2+i$, $2+i$
3. 1, $1+i$, $1-i$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$
4. 1, $1+i$, $1-i$ a $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2+i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2-i \end{pmatrix}$
5. i, $1+i$, $1-i$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Příklad 6

Mějme čtvercovou matici A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Určíme

1. vlastní čísla a vlastní vektory A
2. vlastní čísla a vlastní vektory A^2, A^3
3. vlastní čísla a vlastní vektory A^{-1}

Příklady

Příklad 7 Víme, že matice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ má vlastní čísla $-2,\ 1+i,\ 1-i$.
Určete vlastní čísla matice A^2 a A^{-1}

Příklad 8 Víme, že matice $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ má vlastní čísla $-3,\ i,\ -i$ a vlastní vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix}$

Je možné, aby matice B^2 měla vlastní čísla a vlastní vektory:

- $9,\ -1, -1,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2-i \end{pmatrix}$
- $-9, 1, -1,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix}$
- $9,\ -1,\ -1\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix}$

Příklad 9

a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ověřte, zda některé z čísel $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ je vlastním číslem matice A. Pokud ano, určete odpovídající vlastní vektory.

b)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Zjistěte, který z vektorů $\vec{u} = (1, -2, 3)^T, \vec{v} = (1, -2, -4)^T$ je vlastním vektorem příslušným k matici B^{-1}.

Spektrum a spektrální poloměr

Spektrum matice je množina všech vlastních čísel matice.
Spektrální poloměr matice
je v absolutní hodnotě největší vlastní číslo. $\rho = \max_i \{|\lambda_i|\}$

Příklad 10

Určíme spektrum matice a vlastní čísla, která odpovídají spektrálnímu poloměru.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Definice a věty

- lineární nezávislost vektorů
- lineární závislost vektorů
- **dimenze** vektorového prostoru
- **báze** vektorového prostoru dimenze **k**
- **podprostor** vektorového prostoru
- **hodnost** matice
- **regulární** matice
- **inverzní** matice
- **vlastní čísla a vlastní vektory** matice
- **Frobeniova věta**
- **Cramerovo pravidlo**