Vlastní čísla a vlastní vektory

Seminář čtvrtý

31. října 2018

Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice Komplexní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo čtvercové matice A a $x \in \mathbb{C}^n$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ, pokud

$$Ax = \lambda x, x \neq o.$$

Poznamenejme, že $x \neq o$ je nezbytná podmínka, protože pro $x = o$ by rovnost byla triviálně splněna pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Na druhou stranu, $\lambda = 0$ klidně může nastat.

Výpočet vlastních čísel a určení vlastních vektorů

$$Ax = \lambda \cdot Ex \Rightarrow (A - \lambda E)\, x = o$$

$x \neq o \Rightarrow$ homogenní soustava rovnic s maticí soustavy $(A - \lambda E)$ musí mít nekonečně mnoho řešení, tedy musí platit:

$$\det (A - \lambda E) = 0.$$

Rozepsáním determinantu dostáváme charakteristický polynom matice A vzhledem k proměnné λ. Kořeny tohoto polynomu jsou vlastní čísla λ_k.
Pro každé vlastní číslo řešíme soustavu rovnic

$$(A - \lambda_k E)x_k = o,$$

jejími nenulovými řešeními jsou vlastní vektory x_k.

Vlastní vektor při daném vlastním čísle není určen jednoznačně,

každý jeho nenulový násobek je také vlastním vektorem.

Příklady: Vlastní čísla a vlastní vektory

Určíme vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. charakteristický polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

2. vlastní čísla $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ jsou kořeny $p(\lambda)$, tj. řešení $p(\lambda) = 0$: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5$
3. vlastní vektory, odpovídající λ_1, určíme řešením $(A - \lambda_1 E)x_1 = o$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-(-1) & 2 & 0 \\ 4 & 1-(-1) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t,\ t \neq 0$$

4. vlastní vektory, odpovídající λ_2, určíme řešením $(B - \lambda_2 E)x_2 = o$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-5 & 2 & 0 \\ 4 & 1-5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} r,\ r \neq 0$$

Příklad 2

Určíme vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. charakteristický polynom $p(\lambda) = \det(B - \lambda E)$:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -8 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 + 16 = \lambda^2 - 6\lambda + 25$$

2. vlastní čísla $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ jsou kořeny $p(\lambda)$, tj. řešení $p(\lambda) = 0$:
$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm i\sqrt{64}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 3 + 4i,\ \lambda_2 = 3 - 4i$
3. vlastní vektory, odpovídající λ_1, určíme řešením $(B - \lambda_1 E)x_1 = o$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-(3+4i) & -8 & 0 \\ 2 & 3-(3+4i) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -4i & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), x_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ t \end{pmatrix} t,\ t \neq 0,\ t \in \mathbb{C}$$

4. vlastní vektory, odpovídající λ_2, určíme řešením $(B - \lambda_2 E)x_2 = o$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-(3-4i) & -8 & 0 \\ 2 & 3-(3-4i) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4i & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), x_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} r,\ r \neq 0, r \in \mathbb{C}$$

Příklady

Najdeme vlastní čísla a vlastní vektory matic

Příklad 3

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Příklad 4

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti vlastních čísel

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$.
Potom platí:

- A je regulární právě tehdy, když 0 není její vlastní číslo,
- je-li A regulární, pak A^{-1} má vlastní čísla $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,
- A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,
- αA má vlastní čísla $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,
- $A + \alpha E_n$ má vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \ldots, \lambda_n + \alpha$ a vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$,
- A^T má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ale **vlastní vektory** obecně **jiné**.

Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pak i komplexně sdružené $\bar{\lambda}$ je vlastním číslem A.

Příklad 5

Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Rozhodněte, zda její vlastní čísla resp. vlastní vektory by mohly být:

1. 1, -1, $1+i$
2. 2, $2+i$, $2+i$
3. 1, $1+i$, $1-i$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2+i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$
4. 1, $1+i$, $1-i$ a $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2-i \end{pmatrix}$
5. i, $1+i$, $1-i$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Příklad 6

Mějme čtvercovou matici A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Určíme

1. vlastní čísla a vlastní vektory A
2. vlastní čísla a vlastní vektory A^2, A^3
3. vlastní čísla a vlastní vektory A^{-1}

Příklady

Příklad 7 Víme, že matice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ má vlastní čísla $-2,\ 1+i,\ 1-i$.
Určete vlastní čísla matice A^2 a A^{-1}

Příklad 8 Víme, že matice $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ má vlastní čísla $-3,\ i,\ -i$ a vlastní vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix}$

Je možné, aby matice B^2 měla vlastní čísla a vlastní vektory:

- $9,\ -1, -1,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2-i \end{pmatrix}$
- $-9, 1, -1,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix}$
- $9,\ -1,\ -1\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix}$

Spektrum matice je množina všech vlastních čísel matice.
Elementární řádkové úpravy mění spektrum.
Podobnost je transformace matice, která nemění spektrum.
Matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou podobné, pokud existuje regulární matice $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak, že $A = SBS^{-1}$.
Příklad: Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jsou si podobné : matice S je $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Podobné matice mají stejná vlastní čísla, vlastní vektory nemusí být stejné.
Jestliže matici A převedeme podobnostní transformací na diagonální či obecněji trojúhelníkovou, tak na diagonále najdeme její vlastní čísla.
Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizovatelná, pokud je podobná nějaké diagonální matici. Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná právě tehdy, když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Příklad

Určíme spektrum matice a vlastní čísla, která odpovídají spektrálnímu poloměru.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Kuželosečky

Kuželosečka nebo též algebraická křivka 2. stupně je množina bodů X v rovině, jejichž souřadnice $[x, y]$ vyhovují v nějaké lineární soustavě souřadnic rovnici

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

kde $a_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ jsou reálná čísla $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$.
Pokud by $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, potom by rovnice byla lineární a vyjadřovala by přímku.

Vyjádření rovnice kuželosečky s dvojkami u některých koeficientů je čistě technické a umožňuje nám vyjádřit rovnici kuželosečky

$$\text{maticově: } (x\ y\ 1) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\mathcal{K}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

Vhodnou volbou kartézské soustavy souřadnic, pomocí otočení a posunutí, zjednodušíme rovnici na tzv.

kanonický tvar:

$$X \cdot \underbrace{P \cdot \mathcal{K} \cdot P^T}_{matice\ A} \cdot X^T = 0$$

Klasifikace kuželoseček

Označíme Δ determinant matice $\mathcal{K}$ a $\delta = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

regulární kuželosečky:
$\Delta \neq 0$

- elipsa
- parabola
- hyperbola

středové: $\delta \neq 0$
souřadnice středu $[m,\ n]$
určíme jako řešení

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix}$$

neregulární kuželosečky:
$\Delta = 0$

- 2 různoběžky
- 2 rovnoběžky
- 1 bod
- prázdná množina

nestředové: $\delta = 0$

Regulární středové kuželosečky

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta}{\delta} \end{pmatrix},$$

matici P tvoří **jednotkové** vlastní vektory $\vec{u}, \vec{v}$ a souřadnice středu m, n

$$P = \begin{pmatrix} u_x & v_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$$

Kanonická rovnice je $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$,

kde λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla matice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

- **Elipsa** λ_1, λ_2 mají stejná znaménka a $\dfrac{\Delta}{\delta}$ má opačné znaménko než $\lambda_{1,2}$.
  Střed elipsy
  Osy elipsy jsou ve směrech určených vlastními vektory.

- **Hyperbola** λ_1, λ_2 mají různá znaménka.
  Střed hyperboly
  Osy hyperboly jsou ve směrech určených vlastními vektory.

Regulární nestředové

- **parabola**
  Právě jedno z vlastních čísel je nulové.
  Nulovému vlastnímu číslu náleží vlastní vektor, který odpovídá asymptotickému směru.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{matici } P \text{ tvoří} \\ \text{vlastní vektory } \vec{u}, \vec{v} \\ \text{a souřadnice vrcholu } m, n \end{array} \quad P = \begin{pmatrix} u_x & v_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$$

Kanonická rovnice je $\lambda x^2 + 2py = 0$,
kde λ je nenulové vlastní číslo.

Příklad

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{pmatrix}, \quad \det \mathcal{K} = 81, \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = -9$$

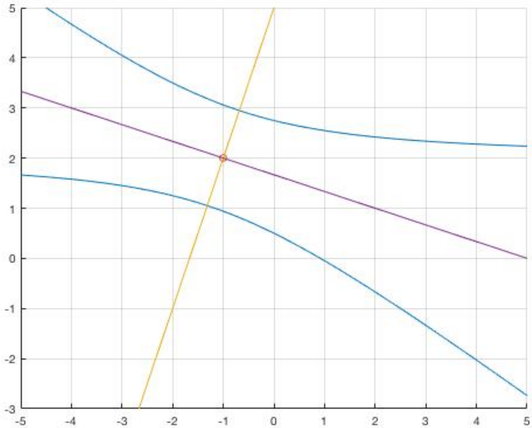
$$\lambda_1 = -1, \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 9, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$S = [-1,\ 2]$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -\sqrt{10} & 2\sqrt{10} & \sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -\sqrt{10} & 2\sqrt{10} & \sqrt{10} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ kanonická rovnice } -x^2 + 9y^2 - 9 = 0$$


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Příklad

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18x - 12y + 15 = 0$$

Pomoc od MATLABu

Zadání matice po prvcích:

- řádky a = [1 2 3 4] nebo b = [1, 2, 3, 4]
- sloupce a = [1 2 3 4]' nebo b = [1; 2; 3; 4]
- matice A = [1 2; 3 4]

Po zadání je vytvořena v prostředí MATLABu vytvořena proměnná A, můžeme ji používat.
Pokud není určena proměnná, kam se má uložit výsledek, použije se proměnná `ans`

Příklady práce s maticemi

- Načtení hodnot ze souboru
  - v souboru `matice.txt` jsou hodnoty odděleny mezerami a středníky
    `A = load('matice.txt')`
  - v souboru `cisla.txt` je na každém řádku jedno číslo
    `B = load('cisla.txt')`
- Zjištění rozměrů matice
  ```
  [mA nA] = size(A)
  [mB nB] = size(B)
  ```
- Vytvoření matice jiného rozměru
  `B=reshape(B, mm, nn)`
  POZOR, počet čísel v původní matici B **musí** být **přesně** `mm*nn`
- Určení hodnosti matic:
  ```
  hA = rank(A)
  hB = rank(B)
  ```

Příklady práce s maticemi

- Je matice regulární?
  `if hA = =mA`
  `disp('Matice A je regularni')`
- Je matice symetrická?
  `if A = =A')`
  `disp('Matice A je symetricka')`
- Determinant matice
  `detA = det(A)`
- Vlastní čísla a vlastní vektory matice
  `spektrumA = eig(A)`
  spektrum matice je množina všech vlastních čísel
  `[V D ] = eig(A)`
  výsledky: V matice, jejíž sloupce jsou vlastní vektory,
  odpovídající vlastním číslům, ktará jsou na diagonále matice D
- Inverzní matice
  `invA = inv(A)`

Řešení soustavy lineárních rovnic

Gaussova eliminační metoda
Dána matice soustavy A.
(*předpokládáme, že matice je regulární, a tedy existuje jediné řešení*) Vektor pravé strany `b` musí být **sloupec**, musí mít tolik prvků, kolik má matice A řádků.
Potom řešení soustavy rovnic:
`x=A\b`
Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
A = [4 2 -1; 1 2 3; 2 0 1]
b = [6; -1; 1]
x=A\b
```

(x = 1 0.5 -1)