Soustavy lineárních rovnic

Seminář třetí

14. října 2019

Obsah

Determinant matice

Definice Nechť A je čtvercová matice.
Determinantem matice A nazýváme číslo, které označujeme $\det A$ a které lze matici A přiřadit podle těchto pravidel:
a) Je-li $A = (a)$ čtvercová matice typu 1×1, pak $\det A = a$.
b) Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice typu $n \times n$ (pro $n > 1$),
vybereme libovolný řádek matice A (označíme jej jako i–tý) a položíme

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

kde A_{ij} je tzv. doplněk prvku a_{ij} v matici A,

$$A_{ij} \;=\; \text{doplněk } a_{ij} \;=\; (-1)^{i+j}A^*_{ij},$$

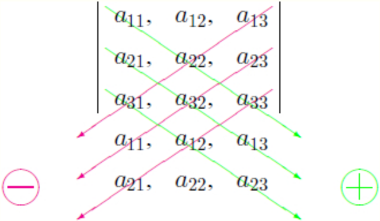
kde A^*_{ij} je determinant čtvercové matice typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z matice A vynecháním i–tého řádku a j–tého sloupce, tj.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \;\cdot\; (-1)^{i+j} \det(A^*_{ij})$$

Součtu říkáme (Laplaceův) rozvoj determinantu podle i-tého řádku.
Pro matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Sarrusovo pravidlo[1]

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ můžeme použít Sarrusovo pravidlo:



$$\det A = \begin{array}{l} \quad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{array}$$

Sarrusovo pravidlo ze použít pouze pro matice rozměru 3×3!

Determinant matice většího rozměru počítáme rozvojem.

[1]Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861)

Adjungovaná matice

Definice Pro čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má adjungovaná matice $\mathrm{adj}(A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ složky:

$$\mathrm{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} A^*_{ji}, \; i, j = 1 \dots n,$$

kde A^*_{ji} je determinant čtvercové matice typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z matice A vynecháním j–tého řádku a i–tého sloupce.

Matice $\mathrm{adj}(A)$ je matice vytvořená z doplňků jednotlivých prvků a následně transponovaná.

Věta Pro každou čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí :

$$A \cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n.$$

Jsou-li prvky matice A celá čísla, bude mít inverzní matice A^{-1} pouze celá čísla právě tehdy, když $\det(A) = \pm 1$.

Výpočet inverzní matice pomocí adjungované matice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{\det A}\left(\boxed{\text{A*}}\right)^T,$$

kde $\boxed{\text{A*}}$ je matice z doplňků prvků a_{ij}.

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{cases} \text{doplněk} = a & (-1)^{1+1}\det(d) & = & +d \\ \text{doplněk} = b & (-1)^{1+2}\det(c) & = & -c \\ \text{doplněk} = c & (-1)^{2+1}\det(b) & = & -b \\ \text{doplněk} = d & (-1)^{2+2}\det(a) & = & +a \end{cases}$$

$$\left(\boxed{\text{A*}}\right) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(A) = \left(\boxed{\text{A*}}\right)^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Vlastnosti determinantu

- Determinant čtvercové matice, která má buď pod hlavní diagonálou nebo nad ní samé nuly je roven součinu prvků na hlavní diagonále.
  - Determinant jednotkové matice typu $n \times n$ je roven 1.
  - Obsahuje-li některý řádek (nebo sloupec) matice A samé nuly, je $\det A = 0$.
- $\det A^T = \det A$
- pro regulární matici: $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
- $\det AB = \det A \cdot \det B$, ale $\det(A+B) \neq \det A + \det B$,
- nicméně: řádková (a sloupcová) linearita:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_1 & \dots & a_{in}+b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matice je regulární $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Determinant a elementární úpravy

K výpočtu determinantu je možné využít Gaussovu eliminaci.
K tomu musíme
a) umět spočítat determinant matice v odstupňovaném tvaru,
b) vědět, jak hodnotu determinantu ovlivňují elementární řádkové úpravy.
Determinant matice v odstupňovaném je roven součinu diagonálních prvků.
Nechť matice A' vznikne z A nějakou elementární úpravou:

1. Vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \in \mathbb{R}$: $\det(A') = \alpha det(A)$.
2. Výměna i-tého a j-tého řádku: $\det(A') = -\det A$.
3. Přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, přičemž $i \neq j$: $\det(A') = \det(A)$.

Příklady

1. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. $$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. $$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$$

Příklady

- Ukažte, že platí:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & -x & -x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x^2 & x \\ y^2 & y \end{vmatrix}$$

- Vyjádřete

$$\begin{vmatrix} x & -x & x \\ x & x & -x \\ x & -x & -x \end{vmatrix}$$

Geometrická interpretace determinantu

Uvažujme čtvercové regulární matice ($A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ \det A \neq 0$)
Představme si řádky matice jako vektory v eukleidovském prostoru.

- $n = 2$ Doplňme v rovině oba vektory na rovnoběžník.
  Plošný obsah rovnoběžníku je roven $|\det A|$.
- $n = 3$ Doplňme v prostoru tři vektory na rovnoběžnostěn.
  Objem tohoto rovnoběžnostěn je roven $|\det A|$.
- $n \in \mathbb{N}$ Doplňme v prostoru vektory na n-rozměrný rovnoběžnostěn.
  Objem tohoto rovnoběžnostěn je roven $|\det A|$.

Poznámka. Svou roli hraje nejen velikost determinantu A, ale také jeho znaménko; to souvisí s pořadím hran rovnoběžnostěnu jako řádků matice A. Speciálně, pro $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ je $\det(A) > 0$ pokud řádky A tvoří pravotočivou posloupnost vektorů (tzv. pravidlo palce), a $\det(A) < 0$ pokud tvoří levotočivou posloupnost.

Soustavy lineárních rovnic

Z jakých úloh?

Nejstarší zaznamenaná úloha na soustavy rovnic (cca 200 př.n.l.):

> *Tři snopy dobrého obilí, dva snopy průměrného a jeden podřadného se prodávají celkem za 39 dou.*
> *Dva snopy dobrého obilí, tři průměrného a jeden podřadného se prodávají za 34 dou.*
> *Jeden snop dobrého obilí, dva průměrného a tři podřadného se prodávají za 26 dou.*
> *Jaká je cena za jeden snop dobrého / průměrného / podřadného obilí?*

Zapsáno dnešní matematikou, dostáváme soustavu rovnic, kde x, y, z jsou neznámé pro ceny za jeden snop dobrého / průměrného / podřadného obilí.

Analytická geometrie – Vzájemná poloha přímek v rovině, rovin v prostoru.

Interpolace a aproximace hodnot z měření

Fyzika – Elektrické obvody, ...

Mějme soustavu m lineárních rovnic o n neznámých

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1, \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2n}x_n & = & b_2, \\
 & & & & & & \vdots & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & a_{mn}x_n & = & b_n.
\end{array}
$$

Řešením rozumíme každý vektor x vyhovující **všem** rovnicím.
Matice soustavy je matice

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

a **rozšířená matice soustavy** je

$$
(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n
\end{array}\right)
$$

Příklad

Pro příklad "o snopech obilí" je soustava rovnic:

$$\text{úloha o snopech obilí} \quad \begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 34 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \end{array},$$

která se maticově zapíše:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right)$$

Rozšířená matice soustavy plně popisuje soustavu rovnic. řádky odpovídají rovnicím, sloupce vlevo neznámým.

Geometrický význam soustavy rovnic

Mějme dvě rovnice o dvou neznámých, $m = n = 2$, tedy

$$\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2. \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & x_2 & = & 3, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 11. \end{array}$$

První rovnice popisuje přímku v $\mathbb{R}^2$ (při $a_{11} \neq 0 \vee a_{12} \neq 0$), ($p: \ 2x - y - 3 = 0$) druhá také, ($q: \ 2x + 3y - 11 = 0$).
Řešení soustavy leží tedy v průniku obou přímek.
Podobně pro $n = 3$, každá rovnice popisuje rovinu v prostoru $\mathbb{R}^3$ a řešení představuje průnik těchto rovin.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & -3 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

Elementární řádkové úpravy

Definice

Elementární řádkové úpravy jsou

1. vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$ (tj. vynásobí se všechny prvky řádku),
2. přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, přičemž $i \neq j$,
3. výměna i-tého a j-tého řádku.

$\boxed{\text{Elementární řádkové operace zachovávají množinu řešení soustavy.}}$

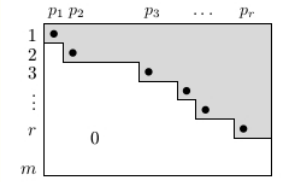
Postup řešení soustavy rovnic Gaussovou eliminací

Pomocí **elementárních úprav** převedeme rozšířenou matici soustavy na jednodušší matici, ze které řešení snadno určíme.
Ten jednodušší tvar matice se nazývá **odstupňovaný** tvar matice.

Definice (Odstupňovaný tvar matice).
Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je v řádkově odstupňovaném tvaru, pokud existuje r takové, že platí

- řádky $1, \dots, r$ jsou nenulové (tj. každý obsahuje aspoň jednu nenulovou hodnotu),
- řádky $r+1, \dots, m$ jsou nulové,

a navíc označíme-li p_i nejmenší číslo sloupce, ve kterém $a_{ij} \neq 0$, tak platí $p_1 < p_2 < \dots < p_r$.



Každou matici lze prevést elementárními řádkovými úpravami do odstupňovaného tvaru.

Sloupce $p_1, \dots p_r$ nazveme bázické, ostatní nebázické.

Převod do odstupňovaného tvaru

Například následující postup převádí matici do odstupňovaného tvaru.
Krok 1: Položíme číslo řádku i=1, číslo sloupce j=1.
Krok 2: Pokud pro všechny "další" řádky $k \geq i$ a sloupce $\ell \geq j$ platí : $a_{k,\ell} = 0$, končíme
(ve zbývající části matice už nejsou nenulové prvky).
Krok 3: Výběr "aktuálního" sloupce j (přeskočíme nulové podsloupečky).
Najdeme nejmenší číslo sloupce $\ell \geq j$ takové, že v řádcích $k \geq i$ je v tomto sloupci aspoň jeden nenulový prvek.
Tento sloupec bude aktuálním sloupcem, tj.
$j = \min\{\ell : \ell \geq j,\ a_{kl} \neq 0 \text{ pro nějaké } k \geq i\}$.
Krok 4: Výběr "aktuálního" řádku i.
Jesližе $a_{ij} = 0$, najdeme řádek $k \geq i$, ve kterém $a_{ik} \neq 0$, a vyměníme řádky k a i.
Krok 5: Elementární úprava řádků $k > i$ (v těchto řádcích vynulujeme zbývající prvky sloupce j).
Ke všem prvkům řádků $k > i$ přičteme $-\dfrac{a_{kj}}{a_{ij}}$ násobek řádku i.
Krok 6: Zvětšíme i o 1, j o 1 a pokračujeme krokem 2.

Příklad převodu matice na odstupňovaný tvar

Soustavě rovnic
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & & & + & 9x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 7 \end{array}$$

odpovídá rozšířená matice $\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right)$ kterou postupně

upravujeme:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{2} & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Existence a počet řešení

Z odstupňovaného tvaru rozšířené matice soustavy poznáme, zda soustava rovnic má nebo nemá řešení:

- Soustava **nemá řešení**,
  je-li aspoň jeden řádek ve tvaru $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & b \neq 0 \end{array}\right)$,
  (takový řádek odpovídá rovnici :$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b \neq 0$).
- Jinak **řešení existuje**; buď jediné nebo nekonečně mnoho.
  Z rozšířené matice soustavy vyškrtneme všechny nulové řádky.
  - Soustava má **jediné** řešení,
    pokud v matici po vyškrtnutí nulových řádků
    zůstalo tolik řádků, kolik je neznámých.
    Toto řešení získáme postupným výpočtem neznámých
    od poslední k první, zdola nahoru tak, že
    - z poslední rovnice vypočteme poslední neznámou,
      tu dosadíme do všech předcházejících rovnic;
    - z předposlední .. druhé rovnic vyjádříme předposlední ..
      druhou neznámou a dosadíme do všech předcházejících rovnic;
    - z první rovnici vyjádříme první neznámou.
  - Soustava **nekonečně mnoho řešení**, pokud po vyškrtnutí nulových řádků zůstalo méně rovnic než neznámých.
    Řešení vyjádříme přes "volné" proměnné.

Vyjádření řešení zpětnou substitucí

Mějme soustavu rovnic v odstupňovaném tvaru.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení existuje, provedeme zpětnou substituci.

$x_4 = 1$

x_3 je volná (nebázická) proměnná

$x_2 = 1 + x_4 - 2x_3 = 2 - 2x_3$

$x_1 = \frac{1}{2}(1 - 5x_4 + x_3 - 2x_2) = -4 + \frac{5}{2}x_3$

Řešení zapíšeme ve tvaru $x = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_3 \in \mathbb{R}$

Příklad o snopech obilí

Maticový zápis:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right)$$

Převod na odstupňovaný tvar:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & -4 & -8 & -39 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & 5 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & -36 & -99 \end{array}\right)$$

Existuje jediné řešení,

$$\begin{aligned}
\text{3. rovnice:} \quad z &= \tfrac{99}{36} = \tfrac{11}{4} = 2.75, \\
\text{2. rovnice:} \quad y &= \tfrac{1}{5}\,(24 - z) = \tfrac{1}{5}\left(24 - \tfrac{11}{4}\right) = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{85}{4} = \tfrac{17}{4} = 4.25, \\
\text{1. rovnice:} \quad x &= \tfrac{1}{3}\,(39 - 2y - z) = \tfrac{1}{3} \cdot \left(39 - 2 \cdot \tfrac{17}{4} - \tfrac{11}{4}\right) = \tfrac{37}{4} = 9.25
\end{aligned}$$

Ceny jednoho snopu obilí jsou:

9.25 dou za dobré, 4.25 dou za průměrné, 2.75 dou za podřadné.

Příklad: Vzájemná poloha rovin

a)	b)
$x + y - 4z = 9$	$x + y - 4z = 1$
$x + y + 2z = 3$	$x + y + 2z = 2$
$x + y - z = 6$	$x + y - z = 3$

Společné body (x, y, z) najdeme, vyřešíme-li soustavy rovnic.
Maticové zápisy:

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Po úpravě na odstupňovaný tvar:

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

∞řešení

$z = -1, y = t, x = 5 - t, t \in \mathbb{R}$

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

nemá řešení

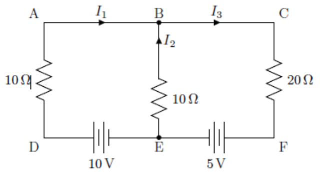
3 roviny nemají společné body

Roviny a) mají společnou přímku,

určenou bodem $[5,\ 0,\ -1]$ a směrovým vektorem $(-1, 1, 0)$

Příklad

Uvažujme elektrický obvod jak je vyznačený na obrázku. Chceme-li určit hodnoty elektrických proudů $I_1,\ I_2,\ I_3$, využijeme fyzikálních zákonů:
1. Ohmův zákon: Napětí je rovno součinu proudu a odporu: $U = IR$,
2. Kirchhoffův zákon o proudu: Součet proudů vstupujících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vystupujících.
3. Kirchhoffův zákon o napětí: Součet napětí ve smyčce je roven nule.



Kirchhoffův zákon o proudu: rovnice

$I_1 + I_2 - I_3 = 0$.

Kirchhoffův zákon o napětí (spolu s Ohmovým zákonem) pro smyčku *DABE* dává rovnici $10I_1 - 10I_2 = 10$, pro smyčku *EBCF* : $10I_2 + 20I_3 = 5$. (Smyčku *DABCFE* již uvažovat nemusíme, neboť vyplývá z předchozích dvou.)

Tím dostáváme soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 10 & -10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 20 & 5 \end{array}\right)$$

Převedeme na odstupňovaný tvar:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 20 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

Vyřešením dostaneme:

$$\begin{aligned} I_1 &= 0.7A \\ I_2 &= -0.3A \\ I_3 &= 0.4A \end{aligned}$$

Frobeniova věta

Definice Hodnost matice

Hodností matice rozumíme počet nenulových řádků po převodu do odstupňovaného tvaru.

Značíme **rank(A)** (nebo **h(A)**).

Frobeniova věta charakterizuje řešitelnost soustav rovnic pomocí hodností matice a rozšířené matice soustavy:

Soustava $(A|b)$ má (aspoň jedno) řešení právě tehdy, když rank(A) = rank$(A|b)$ (h(A)=h$(A|b)$)

Je-li $h(A) = h(A|B) =$počet neznámých, má soustava **jediné** řešení.

Je-li $h(A) = h(A|B) <$počet neznámých, má soustava **nekonečně mnoho** řešení.

V angličtině tuto větu nazývají Rouchého–Capelliho věta,
v Rusku Kroneckerova–Capelliho věta
a ve Španělsku Rouchého– Frobeniova věta.

Můžete se setkat i s názvem Rouché-Fonteného věta.

Frobeniova věta (a hodnosti matic) v příkladech

1. O snopech obilí:
   hodnost matice soustavy: $\text{rank}(A) = 3$,
   hodnost rozšířené matice: $\text{rank}(A|b) = 3 \Rightarrow$ řešení existuje
   počet neznámých $(3) =$ hodnosti matice $\Rightarrow$ jediné řešení
2. Vzájemná poloha rovin:
   hodnost matice soustavy: $\text{rank}(A) = 2$,
   hodnost rozšířené matice:
   a) $\text{rank}(A|b) = 2 \Rightarrow$ řešení existuje
      počet neznámých $(2) <$ hodnosti matice $\Rightarrow \infty$ řešení.
   b) $\text{rank}(A|b) = 3 \Rightarrow$ řešení neexistuje
3. Elektrický obvod:
   hodnost matice soustavy: $\text{rank}(A) = 3$,
   hodnost rozšířené matice: $\text{rank}(A|b) = 3 \Rightarrow$ řešení existuje
   počet neznámých $(3) =$ hodnosti matice $\Rightarrow$ jediné řešení

Homogenní soustava rovnic

Soustava $Ax = 0$ s nulovou pravou stranou se nazývá homogenní.
Evidentně, nulový vektor je vždy jejím řešením.

Příklad

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & & -3x_4 & -x_5 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & & = 0 \\ 4x_1 & -2x_2 & +6x_3 & +3x_4 & -4x_5 & = 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & +4x_4 & -7x_5 & = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice soustavy je 3, neznámých 5 $\Rightarrow \infty$ řešení.
Řešení vyjádříme pomocí 2 parametrů:

$\boxed{x_5 = p, \text{ nebo } x_5 = 6p, x_3 = q, \ p, q \in \mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned} x_5 &= 6p \\ x_4 &= 2p \\ x_3 &= q \\ x_2 &= 5p + q \\ x_1 &= 7p - q \end{aligned} \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} q, \ \ p.q \in \mathbb{R}$$

Cramerovo pravidlo

Věta Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **regulární**, $b \in \mathbb{R}^n$.
Pak řešení soustavy $Ax = b$ je dáno vzorcem

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, i = 1, \ldots, n,$$

kde
$\det A_i$ je determinant čtvercové matice, která vznikne z matice A po nahrazení i-tého sloupce sloupcem pravých stran.

Cramerovo pravidlo z roku 1750 (i když bylo známo už dříve) je pojmenováno po švýcarském matematikovi Gabrielu Cramerovi. Ve své době to byl populární nástroj na řešení soustav lineárních rovnic, dnes má význam spíše teoretický.

Příklad

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & -1 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1, \qquad \det A_1 = 0, \qquad \det A_2 = 1, \qquad \det A_3 = 3$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det A_1}{\det A} = \tfrac{0}{1} = 0 \\ x_2 &= \frac{\det A_2}{\det A} = \tfrac{1}{1} = 1 \\ x_3 &= \frac{\det A_3}{\det A} = \tfrac{3}{1} = 3 \end{aligned}$$

Soustavy rovnic s parametry

Provedeme diskusi řešení soustav vzhledem k parametru a:

Příklad

$$\begin{array}{rrrl} x & -2y & +z & = 1 \\ x & -y & +3z & = 0 \\ x & -4y & -3z & = a \end{array}$$

Příklad

$$\begin{array}{rrl} x & +y & = 1 \\ x & -ay & = a^2 \\ a & -y & = a \end{array}$$

Slovní úlohy

1. Zvětšíme-li jednu stranu trojúhelníka o 11 cm a druhou stranu o 11 cm zmenšíme, dostaneme rovnostranný trojúhelník. Když první stranu vynásobíme čtyřmi, je o 10 cm větší než trojnásobek třetí strany. Vypočtěte velikosti stran trojúhelníka.
2. Kyselina sírová je složena z vodíku, síry a kyslíku. Poměr hmotnosti vodíku a síry je 1 : 16 a poměr hmotnosti kyslíku a síry je 2 : 1. Kolik každého prvku obsahuje 1323 g kyseliny?
3. Hutník má čtyři různé slitiny, které obsahují cín, olovo, vizmut a kadmium. První slitina obsahuje 20 kg cínu a 10 kg olova. Druhá obsahuje 12 kg olova a 6 kg cínu. Třetí obsahuje 10,5 kg vizmutu, 6,4 kg olova a 3,1 kg cínu. Poslední slitina obsahuje 10 kg vizmutu, 5 kg olova, 2,5 kg kadmia a 2,5 kg cínu. Jaké množství každé slitiny je třeba použít na přípravu slitiny, která by obsahovala 81 kg vizmutu, 75 kg olova, 15 kg kadmia a 40 kg cínu ?