Operace s maticemi

Seminář druhý

7.10. 2019

Obsah

Matice

Definice (Matice).
Reálná *matice* typu $m \times n$ je obdélníkové schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Označení:
prvek na pozici (i,j) matice A:a_{ij}
množina všech reálných matic typu $m \times n$: $\mathbb{R}^{m\times n}$.
Je-li $m = n$, potom matici nazýváme **čtvercovou**.

Definice(Vektor).
Reálný n-rozměrný (aritmetický) vektor je matice typu $n \times 1$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Množina všech n-rozměrných vektorů se značí $\mathbb{R}^n$ (namísto $\mathbb{R}^{n\times 1}$).

Speciální matice

- Nulová matice: $\forall i, j : a_{ij} = 0$
- Jednotková matice: (E_n, I_n), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,$a_{ii} = 1,\ a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$
- Čtverová matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Diagonální matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechna $i \neq j$.

  Diagonální matice má na diagonále libovolné prvky a mimo ni jsou nuly.
- Trojúhelníková matice

  Horní trojúhelníková matice. Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je horní trojúhelníková, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechna $i > j$.
  Horní trojúhelníková matice má pod diagonálou nuly. Podobně se zavádí i dolní trojúhelníková matice.

  Příkladem horní trojúhelníkové matice je jakákoli matice v odstupňovaném tvaru (17), protože pivoty musí být na nebo nad diagonálou. Obráceně to ovšem neplatí, horní trojúhelníková matice není automaticky v odstupňovaném tvaru.
- Symetrická matice. Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická, pokud $A = A^T$. Symetrická matice je tedy vizuálně symetrická dle hlavní diagonály.

Základní operace s maticemi

Definice (Rovnost matic). Dvě matice se rovnají, $A = B$, pokud mají stejné rozměry $m \times n$ a $A_{ij} = B_{ij}$ pro všechna i, j.

Definice (Součet matic). Buď $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Pak $A + B$ je matice typu $m \times n$ s prvky $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

Definice (Násobení číslem). Buď $\alpha \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Pak αA je matice typu $m \times n$ s prvky $(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$.

Výše zmíněné operace umožňují zavést přirozeně i odčítání jako $A - B := A + (-1)B$.

Speciální maticí je **nulová matice**, jejíž všechny prvky jsou nuly. Značíme ji 0 či $0_{m \times n}$ pro zdůraznění rozměru.

Věta (Vlastnosti součtu matic a násobení matice číslem).
Platí následující vlastnosti: α, β jsou čísla a A, B, C matice vhodných rozměrů.

1. $A + B = B + A \ldots$ (komutativita)
2. $(A + B) + C = A + (B + C) \ldots$ (asociativita)
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-1)A = 0$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
6. $1A = A$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \ldots$ (distributivita)
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \ldots$ (distributivita)

Příklady

1. Určete matici X: $X = 2\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$
2. Určete matici Y, která pro matice
   $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
   vyhovuje $3A + 2Y = -B$

Součin matic

Definice Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$ a $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

Pak AB je matice typu $m \times n$ s prvky $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Příklad násobení matic

Pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 14 & -19 & 1 & 16 \\ -5 & 17 & \boxed{-9} & -12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vlastnosti součinu matic

Věta. (Vlastnosti součinu matic).

Platí následující vlastnosti: α je číslo a A, B, C matice vhodných rozměrů.

1. $(AB)C = A(BC)$ ... (asociativita)
2. $A(B + C) = AB + AC$ ... (distributivita)
3. $(A + B)C = AC + BC$ ... (distributivita)
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
5. $I_m A = A I_n = A$, kde $A \in R^{m \times n}$

Poznámka. Součin matic obecně není komutativní!
Pro mnoho matic je $AB \neq BA$. Najděte takový příklad!

Příklad: součin matic

Babička jde koupit do obchodu 12 vajec, 6 jablek a 6 hrušek, 12 pomerančů a 3 citróny. Vyjádřeme nákup pomocí následujícího řádkového vektoru $x = (12, 6, 6, 12, 3)$.

Předpokládejme, že vejce jsou po 2 Kč za kus, jablka po 5 Kč, hrušky a pomeranče po 4 Kč a citróny po 3 Kč za kus. Pak můžeme ceny těchto druhů zboží zapsat jako sloupcový vektor $(2, 5, 4, 4, 3)^T$.

Celkovou částku, kterou babička v obchodě zaplatí, můžeme nyní vypočíst součinem vektorů xy, kde vektor x vyjadřuje množství jednotlivých druhů a vektor y ceny jednotlivých druhů.

Babička může nakupovat ve dvou obchodech, ve kterých se ceny poněkud liší. Nechť vektor cen v druhém obchodě je 3 Kč za vejce, 6 Kč za jablko, 3 Kč za hrušku, 5 Kč za pomeranč, 2 Kč za citrón. $(3, 6, 3, 5, 2)^T$

Babička má možnost nakoupit všechno buď v 1. nebo ve 2. obchodě nebo může nakoupit v každém obchodě jen to zboží, které je tam levnější. Abychom jí pomohli se rozhodnout, utvoříme matici cen: První sloupec udává ceny v 1. obchodě, druhý sloupec ceny v 2. obchodě, třetí sloupec udává vždy menší z obou příslušných cen. Abychom sestavili účet pro všechny tři možnosti nákupu, vypočteme součin xC.

Transpozice

Definice Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Pak transponovaná matice má typ $n \times m$, značí se A^T a je definovaná $(A^T)_{ij} := a_{ji}$.
Příklad Transpozice vlastně znamená překlopení dle hlavní diagonály, např.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Věta (Vlastnosti transpozice).
Platí následující vlastnosti: α je číslo a A, B matice vhodných rozměrů.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Příklady

Pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

spočítejte (pokud to má smysl)

1. $(A + 4B) + C$
2. $(A + B)^T \cdot 2C$,
3. $(B \cdot C) \cdot A^T$,
4. $(B \cdot 3A^T) + C$
5. $C \cdot (B^T - (\pi A)^T)$

Příklad

Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Určete

1. $B \cdot A$
2. A^2
3. $A \cdot B - B \cdot A$

Příklad

Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

určete A^2, $A \cdot A^T$

Příklad

Určete matice $A \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Příklad

Určete matici X, pro kterou platí

$$A \cdot B = 2X + A^T,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Elementární (řádkové) úpravy

Elementární řádkové úpravy jsou

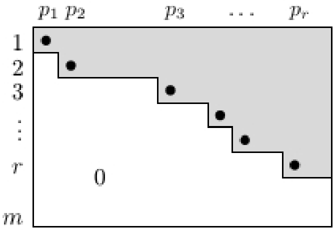
1. vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$
   (tj. vynásobí se všechny prvky řádku),
2. přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, přičemž $i \neq j$,
3. výměna i-tého a j-tého řádku.

Odstupňovaný tvar matice

Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je v řádkově odstupňovaném tvaru, pokud existuje r takové, že platí:

- řádky $1, \dots, r$ jsou nenulové (tj. každý obsahuje aspoň jednu nenulovou hodnotu),
- řádky $r+1, \dots, m$ jsou nulové,

a navíc označíme-li p_i nejmenší číslo sloupce, ve kterém $a_{ij} \neq 0$, tak platí $p_1 < p_2 < \dots < p_r$.



Každou matici lze prevést elementárními řádkovými úpravami do odstupňovaného tvaru.

Sloupce $p_1, \dots p_r$ nazveme bázické, ostatní nebázické.
(zpět na 4)

Hodnost matice

Definice (hodnost matice). Maximální počet lineárně nezávislých řádků matice $\mathbf{A}$ (chápaných jako aritmetické vektory) nazýváme hodností matice $\mathbf{A}$. Značíme ji $\mathbf{h(A)}$.

$\boxed{\text{Elementární řádkové operace nemění hodnost matice}}$

Hodností matice rozumíme počet nenulových řádků po převodu do odstupňovaného tvaru.

Regulární matice

Definice (regulární a singulární matice).
Čtvercovou matici typu $n \times n$, která má **maximální možnou hodnost** (tj. n), nazýváme regulární maticí. Čtvercovou matici, která není regulární, nazýváme singulární maticí.
Typickým příkladem regulární matice je E_n a singulární matice 0.

Tvrzení Čtvercová matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulární $\Leftrightarrow$ soustava $Ax = 0$ má jediné řešení $x = 0$.

Tvrzení Pro čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí: A je regulární $\Leftrightarrow$ pro každé $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ jediné řešení.

Vlastnosti regulárních matic.
Součet regulárních matic nemusí být regulární matice, vezmeme např. $I + (-I) = 0$.
Součin regulárních matic je regulární matice.

Inverzní matice

Motivace pro inverzní matice: Matice umíme sčítat, odečítat, násobit, tak nešly by i dělit? Ukážeme si, že něco jako dělení lze zavést, ale jen pro regulární matice.

Definice Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak A^{-1} je inverzní maticí k A, pokud splňuje

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$$

Které matice mají inverzi? Pouze a jen ty regulární.

Věta (O existenci inverzní matice).
Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Je-li A regulární, pak k ní existuje inverzní matice, a je určená jednoznačně. Naopak, existuje-li k A inverzní, pak A musí být regulární.

Věta Je-li A regulární, pak A^T je regulární.

Věta (Jedna rovnost stačí). Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
(1) Je-li $BA = E$, pak A je regulární a $B = A^{-1}$.
(2) Je-li $AB = E$, pak A je regulární a $B = A^{-1}$.

Výpočet inverzní matice

K matici A připíšeme jednotkovou matici.
Elementárními řádkovými úpravami
převedeme matici A na jednotkovou.
Potom na místě jednotkové matice dostaneme A^{-1}.

$$AE \sim EA^{-1}$$

Pokud na místě A nevznikne jednotková matice,
potom matice A není regulární a inverzní neexistuje.

Věta (Vlastnosti inverzní matice).
Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární. Pak:

- $(A^{-1})^{-1} = A$,
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$,
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ pro $\alpha \neq 0$,
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Příklady

K maticím A, B, C, D určete inverzní, pokud existují.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Maticové rovnice

$$A \cdot X \cdot B = C$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1},$$

pokud inverzní matice existují.

Příklady

1. $$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$$

2. $$X \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinant matice

Definice Nechť A je **čtvercová** matice.

Determinantem matice A nazýváme číslo, které označujeme $\det A$ a které lze matici A přiřadit podle těchto pravidel:

a) Je-li $A = (a)$ čtvercová matice typu 1×1, pak $\det A = a$.

b) Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice typu $n \times n$ (pro $n > 1$), vybereme libovolný řádek matice A (označíme jej jako i–tý) a položíme

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

kde A_{ij} je tzv.doplněk prvku a_{ij} v matici A,

$$A_{ij} \;=\; \text{doplněk } a_{ij} \;=\; (-1)^{i+j} A^*_{ij},$$

kde A^*_{ij} je determinant čtvercové matice typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z matice A vynecháním i–tého řádku a j–tého sloupce, tj.

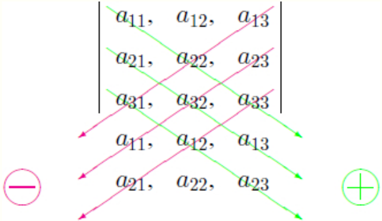
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \;\cdot\; (-1)^{i+j} \det(A^*_{ij})$$

Součtu říkáme (Laplaceův) rozvoj determinantu podle i-tého řádku.

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Sarrusovo pravidlo[1]

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ můžeme použít Sarrusovo pravidlo:



$$\det A = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{array}$$

Sarrusovo pravidlo ze použít pouze pro matice rozměru 3×3!

Determinant matice většího rozměru počítáme rozvojem.

[1]Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861)

Adjungovaná matice

Definice Pro čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má adjungovaná matice $\mathrm{adj}(A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ složky:

$$\mathrm{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} A^*_{ji}, \; i, j = 1 \dots n,$$

kde A^*_{ji} je determinant čtvercové matice typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z matice A vynecháním j–tého řádku a i–tého sloupce.

Matice $\mathrm{adj}(A)$ je matice vytvořená z doplňků jednotlivých prvků a následně transponovaná.
Věta Pro každou čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí :

$$A \cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n.$$

Jsou-li prvky matice A celá čísla, bude mít inverzní matice A^{-1} pouze celá čísla právě tehdy, když $\det(A) = \pm 1$.

Výpočet inverzní matice pomocí adjungované matice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{\det A}\left(\boxed{\mathsf{A*}}\right)^T,$$

kde $\boxed{\mathsf{A*}}$ je matice z doplňků prvků a_{ij}.

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{cases} \text{doplněk} = a & (-1)^{1+1}\det(d) & = & +d \\ \text{doplněk} = b & (-1)^{1+2}\det(c) & = & -c \\ \text{doplněk} = c & (-1)^{2+1}\det(b) & = & -b \\ \text{doplněk} = d & (-1)^{2+2}\det(a) & = & +a \end{cases}$$

$$\left(\boxed{\mathsf{A*}}\right) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(A) = \left(\boxed{\mathsf{A*}}\right)^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Vlastnosti determinantu

- Determinant čtvercové matice, která má buď pod hlavní diagonálou nebo nad ní samé nuly je roven součinu prvků na hlavní diagonále.
  - Determinant jednotkové matice typu $n \times n$ je roven 1.
  - Obsahuje-li některý řádek (nebo sloupec) matice A samé nuly, je $\det A = 0$.
- $\det A^T = \det A$
- pro regulární matici: $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
- $\det AB = \det A \cdot \det B$, ale $\det(A+B) \neq \det A + \det B$,
- nicméně: řádková (a sloupcová) linearita:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_1 & \dots & a_{in}+b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \dots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Matice je regulární $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Determinant a elementární úpravy

K výpočtu determinantu je možné využít Gaussovu eliminaci.
K tomu musíme
a) umět spočítat determinant matice v odstupňovaném tvaru,

b) vědět, jak hodnotu determinantu ovlivňují elementární řádkové úpravy.

Determinant matice v odstupňovaném je roven součinu diagonálních prvků.

Nechť matice A' vznikne z A nějakou elementární úpravou:

1. Vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \in \mathbb{R}$: $\det(A') = \alpha det(A)$.
2. Výměna i-tého a j-tého řádku: $\det(A') = -\det A$.
3. Přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, přičemž $i \neq j$: **nemění determinant,** $\det(A') = \det(A)$.

Příklady

1. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. $$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. $$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$$

Příklady

- Ukažte, že platí:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & -x & -x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x^2 & x \\ y^2 & y \end{vmatrix}$$

- Vyjádřete

$$\begin{vmatrix} x & -x & x \\ x & x & -x \\ x & -x & -x \end{vmatrix}$$