Operace s maticemi

Seminář druhý

17.10. 2018

Obsah

Matice

Definice (Matice).
Reálná *matice* typu $m \times n$ je obdélníkové schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Označení:
prvek na pozici (i, j) matice A:a_{ij}
množina všech reálných matic typu $m \times n$: $\mathbb{R}^{m \times n}$.
Je-li $m = n$, potom matici nazýváme **čtvercovou**.

Definice(Vektor).
Reálný n-rozměrný (aritmetický) vektor je matice typu $n \times 1$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Množina všech n-rozměrných vektorů se značí $\mathbb{R}^n$
(namísto $\mathbb{R}^{n \times 1}$).

Základní operace s maticemi

Definice (Rovnost matic). Dvě matice se rovnají, $A = B$, pokud mají stejné rozměry $m \times n$ a $A_{ij} = B_{ij}$ pro všechna i, j.

Definice (Součet matic). Buď $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Pak $A + B$ je matice typu $m \times n$ s prvky $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

Definice (Násobení číslem). Buď $\alpha \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Pak αA je matice typu $m \times n$ s prvky $(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$.

Výše zmíněné operace umožňují zavést přirozeně i odčítání jako $A - B := A + (-1)B$.

Speciální maticí je **nulová matice**, jejíž všechny prvky jsou nuly. Značíme ji 0 či $0_{m \times n}$ pro zdůraznění rozměru.

Věta (Vlastnosti součtu matic a násobení matice číslem).
Platí následující vlastnosti: α, β jsou čísla a A, B, C matice vhodných rozměrů.

1. $A + B = B + A$. . . (komutativita)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ . . . (asociativita)
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-1)A = 0$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
6. $1A = A$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ . . . (distributivita)
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ . . . (distributivita)

Příklady

Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Určete

1. $3A$
2. $A + B$
3. $2A - 3B$

Součin matic

Definice Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Pak AB je matice typu $m \times n$ s prvky $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Příklad násobení matic

Pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10 & 15 & 12 & 14 \\ 2 & 2 & \boxed{3} & 2 \\ 8 & 10 & 10 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Příklad: soustava rovnic jako součin matic

Mějme matice: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (sloupcový vektor)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a22 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Výsledkem násobení matice A vektorem x je matice $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ (sloupcový vektor):

$$Ax = b,$$

tj. zápis soustavy rovnic.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n \end{matrix} = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}$$

Vlastnosti součinu matic

Jednotková matice.
Značí se I resp. I_n (nebo E, E_n) a je to čtvercová matice řádu n s prvky $I_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $I_{ij} = 0$ jinak.
Je to tedy matice s jedničkami na diagonále a s nulami jinde.
Jednotkový vektor e_i je pak i-tý sloupec jednotkové matice.
Věta. (Vlastnosti součinu matic).
Platí následující vlastnosti: α je číslo a A, B, C matice vhodných rozměrů.

1. $(AB)C = A(BC)$ ...(asociativita)
2. $A(B + C) = AB + AC$ ...(distributivita)
3. $(A + B)C = AC + BC$ ...(distributivita)
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
5. $I_m A = A I_n = A$, kde $A \in R^{m\times n}$

Poznámka. Součin matic obecně není komutativní!
Pro mnoho matic je $AB \neq BA$. Najděte takový příklad!

Transpozice

Definice Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
Pak transponovaná matice má typ $n \times m$, značí se A^T a je definovaná $(A^T)_{ij} := a_{ji}$.

Příklad Transpozice vlastně znamená překlopení dle hlavní diagonály, např.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Věta (Vlastnosti transpozice).
Platí následující vlastnosti: α je číslo a A, B matice vhodných rozměrů.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Příklady

Pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

spočítejte (pokud to má smysl)

1. $(A + 4B) + C$
2. $(A + B)^T \cdot 2C$,
3. $(B \cdot C) \cdot A^T$,
4. $(B \cdot 3A^T) + C$
5. $C \cdot (B^T - (\pi A)^T)$

Příklad

Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Určete

1. $B \cdot A$
2. A^2
3. $A \cdot B - B \cdot A$

Příklad

Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

určete A^2, $A \cdot A^T$

Příklad

Určete matice $A \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Příklad

Určete matici X, pro kterou platí

$$A \cdot B = 2X + A^T,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Příklady pro zvídavé

Příklad Najděte (všechny) matice X, pro které platí:
$X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}X$.

Příklad
Řekneme, že matice A typu $n \times n$ je *idempotentní*, pokud
$A \cdot A = A$.
Najděte idempotentní matici 2×2 různou od I_2.
Ukažte, že pokud A je idempotentní, potom $I_n - A$ je idempotentní.

Příklad
Spočítejte n-tou mocninu matice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
Návod: použijte indukci a vztahy pro součty sinů a kosinů.

Speciální matice

- Nulová matice: $\forall i, j : a_{ij} = 0$
- Jednotková matice: (E_n, I_n), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,$a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$
- Čtverová matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Diagonální matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechna $i \neq j$.

  Diagonální matice má na diagonále libovolné prvky a mimo ni jsou nuly.
- Trojúhelníková matice

  Horní trojúhelníková matice. Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je horní trojúhelníková, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechna $i > j$.
  Horní trojúhelníková matice má pod diagonálou nuly. Podobně se zavádí i dolní trojúhelníková matice.

  Příkladem horní trojúhelníkové matice je jakákoli matice v odstupňovaném tvaru, protože pivoty musí být na nebo nad diagonálou. Obráceně to ovšem neplatí, horní trojúhelníková matice není automaticky v odstupňovaném tvaru.
- Symetrická matice. Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická, pokud $A = A^T$. Symetrická matice je tedy vizuálně symetrická dle hlavní diagonály.

Hodnost matice (opakování)

Definice (hodnost matice). Maximální počet lineárně nezávislých řádků matice **A** (chápaných jako aritmetické vektory) nazýváme hodností matice **A**. Značíme ji **h(A)**.

Definice(Elementární řádkové úpravy).

Elementární řádkové úpravy jsou

1. vynásobení *i*-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$ (tj. vynásobí se všechny prvky řádku),
2. přičtení α-násobku *j*-tého řádku k *i*-tému, přičemž $i \neq j$,
3. výměna *i*-tého a *j*-tého řádku.

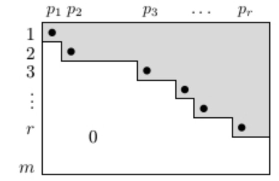
$\boxed{\text{Elementární řádkové operace nemění hodnost matice}}$

Definice

(Odstupňovaný tvar matice).

Matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je v řádkově odstupňovaném tvaru, pokud existuje r takové, že platí

- řádky $1, \dots, r$ jsou nenulové (tj. každý obsahuje aspoň jednu nenulovou hodnotu),
- řádky $r+1, \dots, m$ jsou nulové,



a navíc označíme-li p_i nejmenší číslo sloupce, ve kterém $a_{ij} \neq 0$, tak platí $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$.

Každou matici lze prevést elementárními řádkovými úpravami do odstupňovaného tvaru.

Sloupce $p_1, \dots p_r$ nazveme bázické, ostatní nebázické.

Definice Hodnost matice

Hodností matice rozumíme počet nenulových řádků po převodu do odstupňovaného tvaru.

Regulární matice

Definice (regulární a singulární matice).
Čtvercovou matici typu $n \times n$, která má maximální možnou hodnost (tj. n), nazýváme regulární maticí. Čtvercovou matici, která není regulární, nazýváme singulární maticí.
Typickým příkladem regulární matice je E_n a singulární matice 0.

Tvrzení Čtvercová matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulární $\Leftrightarrow$ soustava $Ax = 0$ má jediné řešení $x = 0$.
Tvrzení Pro čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí: A je regulární $\Leftrightarrow$ pro každé $b \in \mathbb{R}^n$ má soustava $Ax = b$ jediné řešení.

Vlastnosti regulárních matic.
Součet regulárních matic nemusí být regulární matice, vezmeme např. $I + (-I) = 0$.
Součin regulárních matic je regulární matice.

Inverzní matice

Motivace pro inverzní matice: Matice umíme sčítat, odečítat, násobit, tak nešly by i dělit? Ukážeme si, že něco jako dělení lze zavést, ale jen pro regulární matice.

Definice Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak A^{-1} je inverzní maticí k A, pokud splňuje

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$$

Které matice mají inverzi? Pouze a jen ty regulární.

Věta (O existenci inverzní matice).
Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Je-li A regulární, pak k ní existuje inverzní matice, a je určená jednoznačně. Naopak, existuje-li k A inverzní, pak A musí být regulární.

Věta Je-li A regulární, pak A^T je regulární.

Věta (Jedna rovnost stačí). Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
(1) Je-li $BA = E$, pak A je regulární a $B = A^{-1}$.
(2) Je-li $AB = E$, pak A je regulární a $B = A^{-1}$.

Výpočet inverzní matice

K matici A připíšeme jednotkovou matici.
Ekvivalentními úpravami převedeme matici A na jednotkovou.
Potom na místě jednotkové matice dostaneme A^{-1}.

$$AE \sim EA^{-1}$$

Pokud na místě A nevznikne jednotková matice, potom matice A není regulární a inverzní neexistuje.

Příklady

K maticím A, B, C, D určete inverzní, pokud existují.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti inverzní matice

Věta (Vlastnosti inverzní matice).
Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární. Pak:

- $(A^{-1})^{-1} = A$,
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$,
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ pro $\alpha \neq 0$,
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Maticové rovnice

$$A \cdot X \cdot B = C$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1},$$

pokud inverzní matice existují.

Příklady

1. $$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$$

2. $$X \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$