# Určitý (Riemannův) integrál a aplikace.

## Seminář 11

9. prosince 2019

# Určitý integrál

**Existence:**
Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$.
Nechť je splněna na tomto intervalu kterákoliv z následujících podmínek:
(1) $f(x)$ je monotónní,
(2) $f(x)$ je spojitá,
(3) $f(x)$ je omezená a má nejvýše konečný počet bodů nespojitosti.
Potom existuje určitý integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Výpočet určitého integrálu: **Newtonova - Leibnitzova formule**
Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť $F(x)$ je její primitivní funkce. Potom platí:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

# Základní vlastnosti určitého integrálu

- Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $\langle a,\ b\rangle$. Pak také funkce $f(x) \pm g(x)$ a $cf(x)$, kde $c$ je libovolná konstanta, jsou na tomto intervalu integrovatelné a platí:
  - $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\ \mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} \pm \int_a^b g(x)\ \mathrm{dx}$
  - $\displaystyle\int_a^b cf(x)\ \mathrm{dx} = c\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$
- Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a,\ b\rangle$. Pak je integrovatelná i na libovolném podintervalu $\langle c,\ d\rangle$, kde $a \leq c < d \leq b$.
- Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $\langle a,\ b\rangle$ a $a < c < b$. Pak funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a,\ b\rangle$ právě tehdy, když je integrovatelná na obou intervalech $\langle a,\ c\rangle$ a $\langle c,\ b\rangle$. Přitom platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\ \mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\ \mathrm{dx}$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\ \mathrm{dx} = 0, \qquad \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{dx}$

# Metoda per partes pro určitý integrál

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na intervalu $\langle a,\ b\rangle,\ a < b$, derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, které jsou na tomto intervalu integrovatelné. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = u(x)v(x)\ |_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x$$

# Substituční metoda pro určitý integrál

Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $\langle a,\ b\rangle,\ a < b$.
Nechť funkce $\varphi(x)$ má derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu $\langle \alpha,\ \beta\rangle,\ \alpha < \beta$, která je na tomto intervalu integrovatelná.
Dále nechť platí $a \leq \varphi(x) \leq b$ pro $x \in \langle \alpha,\ \beta\rangle$ (tedy $\varphi(x)$ zobrazuje interval $\langle \alpha,\ \beta\rangle$ do intervalu $\langle a,\ b\rangle$).
Pak platí, že

$$\int_\alpha^\beta f\,\underbrace{(\varphi(x))}_{t}\,\underbrace{\varphi'(x)\ \mathrm{dx}}_{\mathrm{dt}} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ \mathrm{dt}$$

# Aplikace určitého integrálu

**Geometrické aplikace**

- Obsah rovinné množiny
- Délka křivky
- Objem rotačního tělesa
- Obsah pláště rotačního tělesa

**Fyzikální aplikace**

- hmotnost,
- statický moment,
- souřadnice těžiště,
- moment setrvačnosti...

# Výpočet obsahu (plochy) rovinných útvarů

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ , a je na něm **nezáporná**. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou $x$ platí

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ **nekladná**, pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou $x$ platí

$$P = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné a platí $g(x) \leq f(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce $g(x)$, shora grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$ platí

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

# Příklady

**Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného**

1. $y = 4 - x^2;\ y = 0$
2. $xy = 4;\ x + y = 5$
3. $y^2 = 2x + 1,\ x - y - 1 = 0$
4. $y \leq 4,\ x^2 \geq y,\ x^2 \leq 4y$

# Objem rotačního tělesa

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $< a, b >$. Pak rotační těleso, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora funkcí $f(x)$, osou $x$ a přímkami $x = a$, $x = b$ kolem osy $x$, má objem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx$$

Pro výpočet objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $g(x) \leq f(x)$ kolem osy $x$ pro $x \in < a, b >$ použijeme vztah

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx - \pi \int_a^b g^2(x)\ dx = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]\ dx$$

Zcela analogicky můžeme určit objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikl rotací spojité křivky $x = h(y),\ y \in < c, d >$ kolem osy $y$:

$$V = \pi \int_c^d h^2(y)\ dy$$

# Objem: příklady

- $y = x^2, \; x = y^2$ kolem osy $x$; kolem osy $y$
- $xy = 4, \; x = 1, \; x = 4, \; y = 0$
- $y^2 = 5x, \; x = 8$

# Délka oblouku křivky

Nechť je funkce $f(x)$ definovaná na intervalu $< a, b >$ a má zde spojitou derivaci. Pak délka této křivky

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Příklad

1. $y = \ln x, \ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$

Nechť funkce $f$ je dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$jsou spojité pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ Pak délka této křivky

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Příklad

1. $x = 2\cos t, \ y = 2\sin t, \ 0 \leq t \leq \pi$

# Hmostnost rovinné křivky

Nechť funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $\langle\alpha,\ \beta\rangle$ a funkce $\rho(t)$ je na tomto intervalu spojitá a nezáporná.
Potom křivka $C$ zadaná parametrickými rovnicemi
$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$, která má délkovou hustotu $\rho(t)$ má hmotnost

$$m(C)=\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ \mathrm{dt}$$

Je-li křivka $C$ grafem funkce $f(x)$ a $\rho(x)$ udává její délkovou hustotu v bodě $[x,f(x)]$, potom je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a,\ b\rangle$ a $\rho(x)\geq 0$ na tomto intervalu, je hmotnost

$$m(C)=\int_a^b \rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ \mathrm{dx}$$

- příklad: $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2,\ \rho(x)=x$

$$\ell=\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{dx} \qquad\qquad m=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{dx}$$

# Statické momenty a těžiště

Souřadnice těžiště

$$T = \left[\frac{S_y(C)}{m(C)}, \ \frac{S_x(C)}{m(C)}\right],$$

kde $m(C)$ je hmotnost křivky a $S_x, S_y$ statické momenty vzhledem k osám $x$ a $y$

$$S_x(C) = \int_a^b f(x) \ \rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2} \,\mathrm{dx},$$

$$S_y(C) = \int_a^b x \ \rho(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2} \,\mathrm{dx}$$

- příklad: $f(x) = \frac{1}{2}x^2, \ \rho(x) = x$

$S_x = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \ x \ \sqrt{1+x^2} \,\mathrm{dx}$ $\frac{\sqrt{2}+1}{15}$

$S_y = \int_0^1 x^2 \ \ \sqrt{1+x^2} \,\mathrm{dx}$ $\frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$

# Hmotnost a těžiště rovinné desky

Speciální případ: plošná hustota $\rho$ v bodě $[x, y]$ závisí pouze na $x$ a deska má tvar $D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$

$$m(D) = \int_a^b \rho(x)(f(x) - g(x))\ \mathrm{dx}$$

$$S_x(D) = \frac{1}{2} \int_a^b \rho(x)(f^2(x) - g^2(x))\ \mathrm{dx}$$

$$S_y(D) = \int_a^b x\rho(x)(f(x) - g(x))\ \mathrm{dx}$$

$$T = \left[\frac{S_y(D)}{m(D)},\ \frac{S_x(D)}{m(D)}\right]$$

- příklad $y = 4x(1-x),\ \rho(x) = x^2$

$(m = \frac{1}{5},\ S_x = \frac{8}{105}\ S_y = \frac{2}{15})$