Určitý (Riemannův) integrál a aplikace. Nevlastní integrál

Seminář 11

19. prosince 2018

Určitý integrál

Existence:

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$.
Nechť je splněna na tomto intervalu kterákoliv z následujících podmínek:

(1) $f(x)$ je monotónní,
(2) $f(x)$ je spojitá,
(3) $f(x)$ je omezená a má nejvýše konečný počet bodů nespojitosti.

Potom existuje určitý integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Výpočet určitého integrálu: **Newtonova - Leibnitzova formule**

Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť $F(x)$ je její primitivní funkce. Potom platí:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Základní vlastnosti určitého integrálu

- Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $\langle a,\ b\rangle$. Pak také funkce $f(x) \pm g(x)$ a $cf(x)$, kde c je libovolná konstanta, jsou na tomto intervalu integrovatelné a platí:
  - $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\ \mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} \pm \int_a^b g(x)\ \mathrm{dx}$
  - $\displaystyle\int_a^b cf(x)\ \mathrm{dx} = c\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$
- Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a,\ b\rangle$. Pak je integrovatelná i na libovolném podintervalu $\langle c,\ d\rangle$, kde $a \leq c < d \leq b$.
- Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $\langle a,\ b\rangle$ a $a < c < b$. Pak funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a,\ b\rangle$ právě tehdy, když je integrovatelná na obou intervalech $\langle a,\ c\rangle$ a $\langle c,\ b\rangle$. Přitom platí $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\ \mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\ \mathrm{dx}$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\ \mathrm{dx} = 0,\ \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{dx}$

Metoda per partes pro určitý integrál

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají na intervalu $\langle a,\ b\rangle,\ a < b$, derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, které jsou na tomto intervalu integrovatelné. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x$$

Substituční metoda pro určitý integrál

Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $\langle a,\ b\rangle,\ a < b$. Nechť funkce $\varphi(x)$ má derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu $\langle \alpha,\ \beta\rangle,\ \alpha < \beta$, která je na tomto intervalu integrovatelná. Dále nechť platí $a \leq \varphi(x) \leq b$ pro $x \in \langle \alpha,\ \beta\rangle$ (tedy $\varphi(x)$ zobrazuje interval $\langle \alpha,\ \beta\rangle$ do intervalu $\langle a,\ b\rangle$). Pak platí, že

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\ \mathrm{dx} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\ \mathrm{dt}$$

Aplikace určitého integrálu

Geometrické aplikace

- Obsah rovinné množiny
- Délka křivky
- Objem rotačního tělesa
- Obsah pláště rotačního tělesa

Fyzikální aplikace

- hmotnost,
- statický moment,
- souřadnice těžiště,
- moment setrvačnosti...

Výpočet obsahu (plochy) rovinných útvarů

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$, a je na něm **nezáporná**. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x platí

$$P = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ **nekladná**, pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x platí

$$P = -\int_a^b f(x)\ dx.$$

Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné a platí $g(x) \leq f(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce $g(x)$, shora grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$ platí

$$P = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\ dx.$$

Příklady

Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného

1. $y = 4 - x^2;\ y = 0$
2. $xy = 4;\ x + y = 5$
3. $y^2 = 2x + 1,\ x - y - 1 = 0$
4. $y \leq 4,\ x^2 \geq y,\ x^2 \leq 4y$

Objem rotačního tělesa

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $< a, b >$. Pak rotační těleso, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora funkcí $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ kolem osy x, má objem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx$$

Pro výpočet objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $g(x) \leq f(x)$ kolem osy x pro $x \in < a, b >$ použijeme vztah

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx - \pi \int_a^b g^2(x)\ dx = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]\ dx$$

Zcela analogicky můžeme určit objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikl rotací spojité křivky $x = h(y),\ y \in < c, d >$ kolem osy y:

$$V = \pi \int_c^d h^2(y)\ dy$$

Objem: příklady

- $y = x^2,\ x = y^2$ kolem osy x; kolem osy y
- $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$
- $y^2 = 5x,\ x = 8$

Délka oblouku křivky

Nechť je funkce $f(x)$ definovaná na intervalu $< a, b >$ a má zde spojitou derivaci. Pak délka této křivky

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Příklad

1. $y = \ln x, \ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$

Nechť funkce f je dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$jsou spojité pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivaci na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ Pak délka této křivky

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Příklad

1. $x = 2\cos t, \ y = 2\sin t, \ 0 \le t \le \pi$

Nevlastní integrál

- Nevlastní integrál na neohraničeném intervalu
  Uvažujme funkci f definovanou na intervalu $\langle a,\ +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, takovou, že pro každé $c > a$ existuje určitý integrál $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$.
  Pak můžeme definovat funkci F vztahem $F(c) = \displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x,\ c \geq a$.
  Nechť existuje $\lim\limits_{c\to\infty} F(c) = I,\ I \in \mathbb{R}$.
  Pak řekneme, že
  $\boxed{\text{nevlastní integrál } \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x \text{ konverguje a jeho hodnota je } I.}$
- Nevlastní integrál z neohraničené funkce
  Uvažujme funkci f definovanou na intervalu $\langle a,\ b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, která není na intervalu $\langle a,\ b)$ ohraničená, takovou, že pro každé $c \in (a,\ b)$ existuje určitý integrál $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$.Pak můžeme definovat funkci F vztahem $F(c) = \displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x,\ a \leq c < b$.
  Nechť existuje $\lim\limits_{c\to b^-} F(c) = I,\ I \in \mathbb{R}$.
  Pak řekneme, že
  $\boxed{\text{nevlastní integrál } \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x \text{ konverguje a jeho hodnota je } I.}$

Příklady

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ $[\frac{\pi^3}{12}]$
- $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x$ $[\frac{\pi}{4}]$
- $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ $[-\frac{1}{2}]$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\,\mathrm{d}x$ $[\frac{5}{2}]$
- $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$ $[2\sqrt{2}]$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$ $[-1]$
- $\displaystyle\int_{-8}^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ $[\frac{15}{2}]$
- $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$ $[D]$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ $[\pi]$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ $[1]$
- $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x$ $[D]$
- $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x$ $[D]$
- $\displaystyle\int_{0}^{1} x\ln x\,\mathrm{d}x$ $[-\frac{1}{4}]$
- $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ $[\ln 3]$